ISBN: 978-958-58347-2-9

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR
DE ANTIOQUIA

Quédate
con el Cálculo Diferencial

Quédate en COLMAYOR!

Alcaldía de Medellín
Cuenta con vos

EDITORIAL
COORDINADORA QUÉDATE EN COLMAYOR
Ivón Patricia Jaramillo García
CORRECCIÓN DE ESTILO
Ana María Garzón Sepúlveda
Jhara Alejandra Bedoya Londoño
Eduard Alberto García Galeano
DISEÑO GRÁFICO
Steven Buelvas Gil

AUTOR
Javier F. Rodriguez Zuleta

Cálculo Diferencial

4 de noviembre de 2016

Índice general

1 Funciones

Definición 1.1 Función

Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto X (llamado Dominio), uno y sólo un elemento de un conjunto Y (llamado Rango).

1.1 Representación de funciones

Una función se puede representar como se define a continuación.

Definición 1.2 Formas de repreentar una función

1. Analítica o simbólica: Es una ecuación que relaciona las variables, mediante operaciones matemáticas. Se entenderá *operaciones matemáticas* en el sentido más amplio del término y no referido, únicamente, a las operaciones básicas.
2. Numérica o tabular: en este caso la anotación de los valores del argumento, o variable X, se efectúan en cierto orden, y de la misma manera se escriben los valores correspondientes de la función, o variable Y.

   La representación tabular de una función permite visualizar la dependencia que existe entre los valores de la variable Y, cuando se le asignan valores a la variable X.
3. Diagrama sagital:esta forma de expresión utiliza las nociones de conjunto para representar el proceso mediante el cual dos conjuntos se determinan una función o una relación.
4. Gráfica: en el sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, todo conjunto de puntos de la forma (x, y), que no se hallen sobre una recta paralela al eje Y, podemos decir que es conjunto representa una en una función $y = f(x)$. Las abscisas de los puntos constituyen los valores del argumento y las ordenadas correspondientes, los de la función.
5. Verbal: esta forma de representación, requiere de un contexto determinado y, usualmente, esos contextos son proporcionados por otras ciencias.

Ejemplo 1.1 –Representación de una función en forma analítica o simbólica.

En la forma analítica de representar una función, elegiremos la representación de la forma $y = f(x) = 2x$

Como indica la definición de función, x es la variable que representa el dominio, y la denominaremos ***variable independiente*** y y o $f(x)$, representa el rango y la nombraremos como ***variable dependiente***.

Ejemplo 1.2 –Representación de una función en forma numérica o tabular.

En la función $y = f(x) = 2x$, significa que el valor de la variable y se obtiene multiplicando por 2, el valor que le asignemos a la variable x, así: $y = f(1) = 2(1) = 2$, es decir, y toma el valor de 2, cuando a x se le asigna el valor de 1

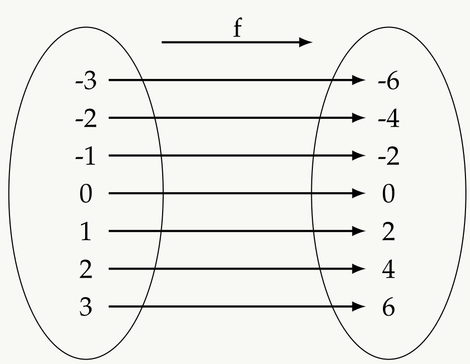
$y = f(-2) = 2(-2) = -4$, es decir, y toma el valor de -4, cuando a x se le asigna el valor de -2

Este procedimiento se puede sintetizar mediante el uso de la tabla de valores, de la siguiente manera para este ejemplo

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\longrightarrow$	Valor asignado a x
$y = f(x) = 2x$	-6	-4	-2	0	2	4	6	$\longrightarrow$	Valor obtenido, después de multiplicar por 2, el valor asignado a x
		$\uparrow$ Par Ordenado							

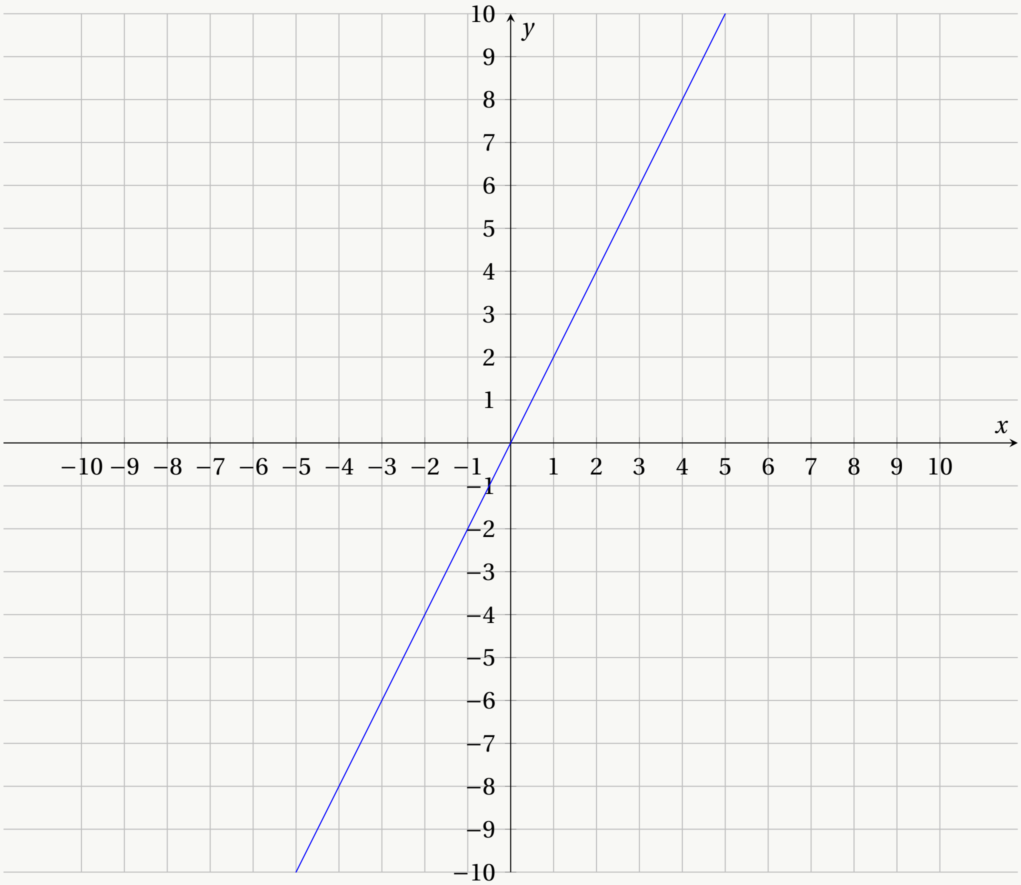
Ejemplo 1.3 –Representación de una función mediante un diagrama sagital.

En la representación con el diagrama Sagital, utilizaremos para el dominio los valores dados a x y en el rango, los valores obtenidos para $y = f(x)$ en el ejemplo anterior



Ejemplo 1.4 –Representación de una función en forma gráfica.

Por convención, la variable x es ordenada y en el sistema Rectangular o Cartesiano, está representada en el eje horizontal, donde está definido el Dominio de la función. La variable y o abscisa está representada en el eje vertical y es dónde está definido el Rango de la función.



Nota: La representación gráfica se realiza teniendo en cuenta que, para esta función, a la variable x se le puede asignar cualquier número Real, incluyendo todos los Racionales e Irracionales entre un Entero y el siguiente, es decir, los valores del dominio son continuos

Ejemplo 1.5 –Representación de una función en forma verbal.

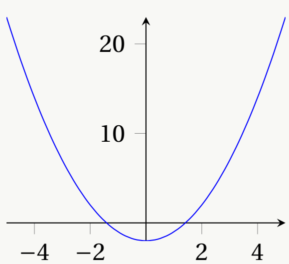
Al estudiar diversos fenómenos de la naturaleza, que permiten ser observables, medibles y cuantificables y, por tanto, susceptibles de traducir al lenguaje matemático. Se hace necesario la utilización de modelos que permitan, por ejemplo, estudiar el movimiento, la variación o cambio de posición de un objeto con respecto, o en función, del tiempo. En Geometría, el área de una figura está en función a sus lados, o de su radio cuando se trate de un círculo o una esfera, por citar dos ejemplos. La forma verbal de una función, se encuentra en el lenguaje natural cuando relacionamos, por ejemplo un lápiz con su costo de venta, lo que implicaría que la cantidad de lápices depende, o está en función, de su costo. En Cálculo, las formas verbales de una función se pueden traducir al lenguaje matemático para realizar los análisis que se requieran. A continuación se ilustran algunas formas verbales y su correspondiente forma matemática, o analítica.

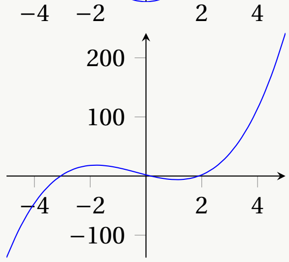
Forma verbal	Forma Analítica
Dos veces un número	$2x$
9 menos un medio de un número	$9-\frac{x}{2}$
La diferencia de dos números al cuadrado	x^2-y^2
El triple producto de dos números	$3(xy)$
Un medio de la aceleración por el tiempo al cuadrado	$\frac{at^2}{2}$
La diferencia entre un número y su siguiente	$n-(n+1)$
El cuadrado de la diferencia de dos números	$(a-b)^2$

1.2 Criterio (prueba) de la recta vertical

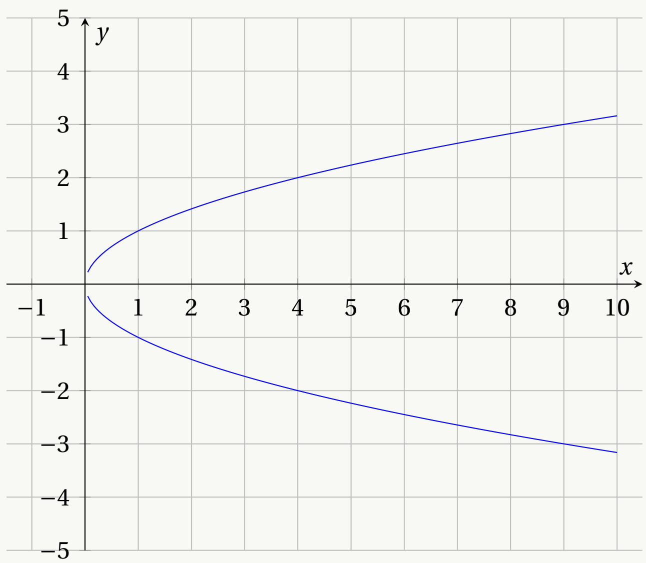
A partir de una gráfica, podemos determinar si ella representa, o no, una función si trazando una recta vertical, esta sólo corta, o interseca, a la gráfica, a lo sumo, en un punto.

Ejemplo 1.6 –**Gráficas que representan funciones.**





Ejemplo 1.7 –Gráfica que no representa función.



1.3 Propiedades y tipos de funciones

1.3.1 Según su comportamiento

Funciones crecientes

Una función $f(x)$ es creciente sobre un intervalo $[a,b]$, sí y sólo si $f(x_1) < f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$ en el intervalo.

Funciones decrecientes

Una función $f(x)$ es decreciente sobre un intervalo $[a,b]$, sí y sólo si $f(x_1) > f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$ en el intervalo.

Función continua

Una función es continua si cumple las siguientes condiciones: 1. El dominio es el intervalo $(-?,?)$, 2. para todos los valores del dominio, le corresponde una imagen en el rango 3. Su gráfica puede ser trazada sin levantar el lápiz de la hoja, es decir, la curva no presenta interrupciones.

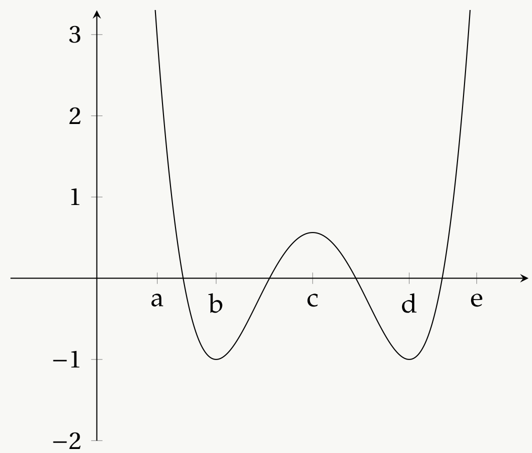
Función discontinua

Una función es discontinua si en algún punto sobre si gráfica presenta saltos o interrupciones, es decir, si no es posible trazar la curva en un solo trazo, sin levantar el lápiz de la hoja.

La continuidad de una función se definirá matemáticamente en el capítulo 2, Límites y continuidad

Ejemplo 1.8 –Función creciente y decreciente.

La gráfica que se muestra es decreciente en el intervalo $[a,b]$, luego es creciente en el intervalo $[b,c]$, decrece en el intervalo $[c,d]$ y finalmente, es creciente en el intervalo $[d,e]$. Nótese que los puntos marcados como $x_1 y x_2$, sobre el intervalo $[a,b]$ y los puntos marcados como $x_5 y x_6$, sobre el intervalo $[c,d]$, cumplen la condición para ser decreciente y, así mismo, los puntos marcados como $x_3 y x_4$ y los puntos marcados como x_7 y x_8, cumplen la condición para que la curva sea creciente en los intervalos $[b,c]$ y $[d,e]$, respectivamente



1.4 Simetrías, función par e impar

1.4.1 Función par

Una función $f(x)$ es par, y por tanto, simétrica con respecto al eje y, si cumple que $f(-x) = f(x)$, para todo x en el dominio

Ejemplo 1.9 –Función par.

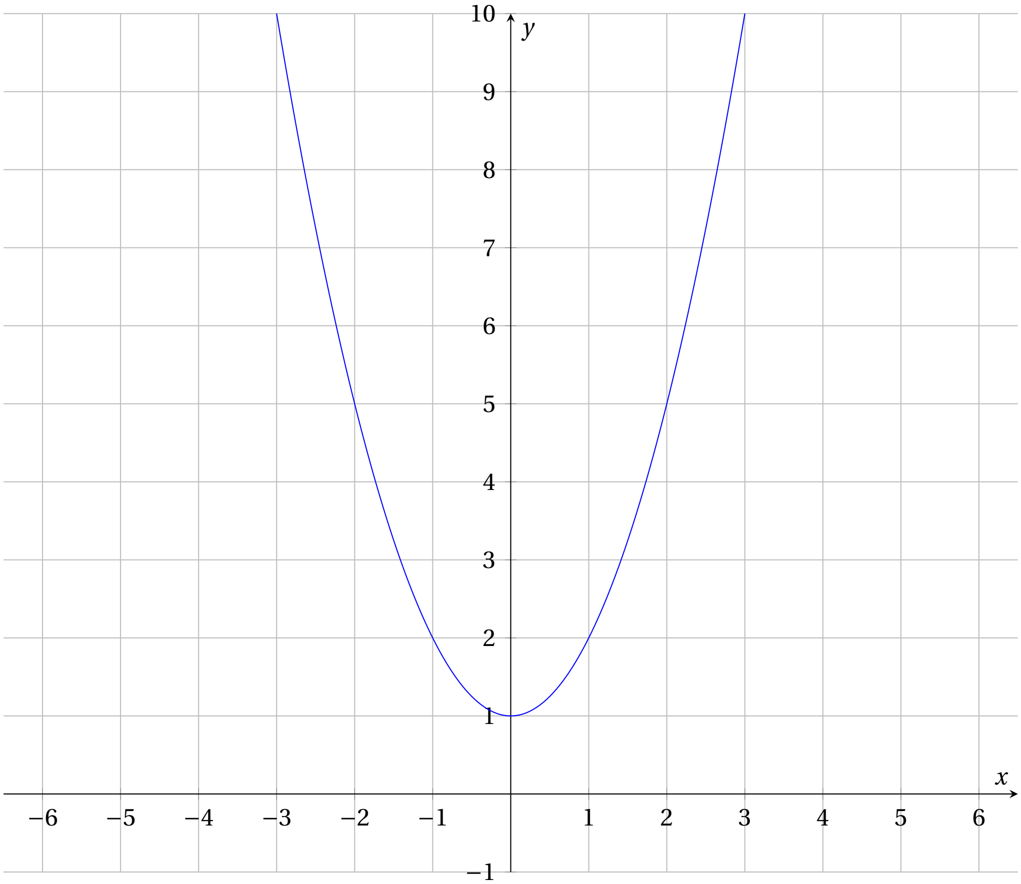
Dada la función $y = f(x) = x^2 + 1$, probar que es una función par y por tanto, simétrica al eje y. Para esto, cambiamos x por $-x$ y realize las operaciones debidas así

Procedimiento 1.1 –Probemos que la función $y = f(x) = x^2$ es par

$f(x) = x^2 + 1$	Función dada
$f(-x) = (-x)^2 + 1$	Se sustituye x por $-x$
$f(-x) = x^2 + 1$	Dado que todo número, o variable,
	elevado a una potencia par, siempre será positivo

Observemos que el resultado final es la misma función y se verifica que $f(-x) = f(x)$ y por tanto, la función es par y simétrica con el eje y.

Ahora bien, la representación gráfica de la función $y = f(x) = x^2 + 1$ es:



1.4.2 Función impar

Una función $f(x)$ es impar, y por tanto, simétrica con respecto al origen, si cumple que $f(-x) = -f(x)$, para todo x en el dominio

Ejemplo 1.10 –Función impar.

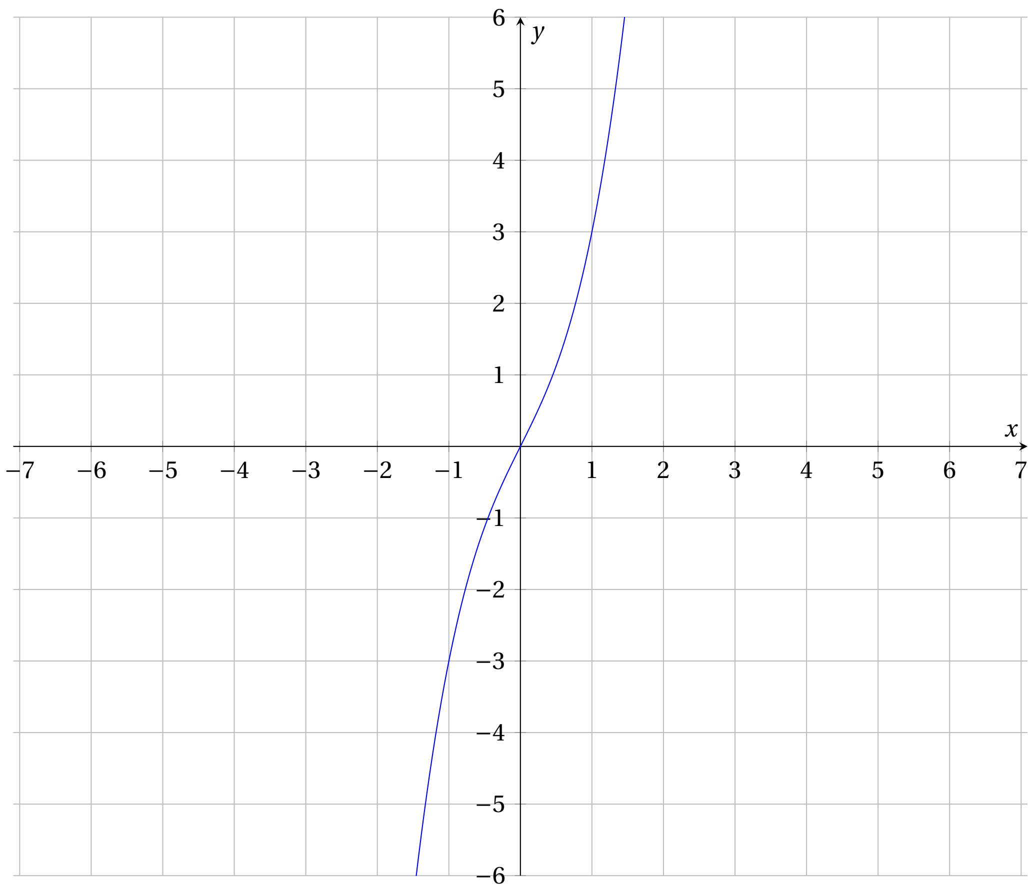
Dada la función $y = f(x) = x^3 + 2x$, probar que es una función impar y por tanto, simétrica al origen. Para esto, cambiamos x por -x y realizamos las operaciones debidas así

Procedimiento 1.2 –Probemos que la función $y = f(x) = x^3 + 2x$ es impar

$f(x) = x^3 + 2x$	Función dada
$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x)$	Se sustituye x por $-x$
$f(-x) = -x^3 - 2x$	Dado que todo número, o variable, elevado a una potencia impar, no cambia de signo
$f(-x) = -(x^3 + 2x)$	Factor común

Observemos que el resultado final es la misma función $f(x)$ multiplicada por -1 y se verifica que $f(-x) = -f(x)$ y por tanto, la función es impar y simétrica con el origen.

Ahora bien, la representación gráfica de la función $y = f(x) = x^3 + 2x$ es:



1.5 Función Inversa

Dada una función f que toma elementos de A y los lleva a B, bajo ciertas circunstancias se podrá definir una función f^-1 que toma elementos de B y los lleva a A. En este caso la función f^-1 se denomina *función inversa* de f. Hay que notar que la función f es, a su vez, la función inversa de f^-1.

Más adelante, en este mismo capítulo, profundizaremos sobre las funciones inversas y hablaremos del modo cómo ellas se determinan.

1.6 Funciones según su estructura algebraica

Las funciones Polinomiales se clasifican en: El dominio de una función **POLINOMICA** es todos los reales y su rango depende del grado del **POLINOMIO**

1.6.1 Función lineal o función línea recta

Definición 1.3 Función linel

Es una función polinómica de primer grado, en otras palabras, es un **POLINOMIO** de grado uno y su representación en el plano es una línea recta.

Ecuación Pendiente - Intercepto

esta función se puede escribir de la forma $f(x) = y = mx + b$, donde m y b, son constantes reales y X es una variable real. La constante m representa la pendiente de la recta y b es el punto donde la recta corta al eje Y.

Cuando b es cero la recta pasa por el eje de coordenadas y su ecuación es $f(x) = y = mx$

La pendiente de la recta determinada la inclinación de esta con respecto a los ejes. Si la pendiente es un número positivo, la recta es creciente, si la pendiente es un número negativo, la recta será decreciente. Si la pendiente es igual a cero entonces la recta es horizontal o constante.

Definición geométrica de pendiente

Para hablar de la decisión geométrica de la pendiente es necesario introducir la definición analítica de ella. La pendiente se define como la razón de cambio entre el cambio en Y y el cambio en X, de esta manera $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Lo anterior significa que existe una relación entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal para ir de un punto a otro sobre la recta. Al ser una recta, los desplazamientos deben ser constantes para cada uno de los ejes.

Ecuación Punto - Pendiente

Desde la geometría una recta se puede definir dados dos puntos cualquiera. Con la definición de la pendiente utilizada en el ítem anterior definiremos el procedimiento para determinar la ecuación de la recta a partir de dos puntos cualquiera.

Primero definimos el valor de la pendiente y posteriormente en la ecuación sustituimos o reemplazamos los valores conocidos de uno de los puntos dado.

Rectas paralelas

Si dos rectas tienen la misma pendiente entonces las rectas son paralelas entre sí y viceversa

Seguir el producto del Valor de las pendientes de dos rectas es igual a -1, entonces la rectas son perpendiculares y viceversa.

En este punto podemos afirmar que para determinar la ecuación de la recta es necesario tener:

1. Dos puntos cualquiera sobre la recta, para con ellos determinar la pendiente y posteriormente utilizando la ecuación punto pendiente determinar la ecuación de la recta.

2. La pendiente de la recta y el intercepto con el eje Y. Utilizamos la ecuación pendiente intercepto

3. La pendiente y un punto cualquiera, utilizamos la ecuación punto pendiente para determinar la ecuación de la recta.

1.7 Función cuadrática

Definición 1.4 Función cuadrática

Es una función polinómica de grado dos, su dominio es todos los reales y su representación geométrica es una curva llamada parábola.

SI el coeficiente principal es positivo, entonces la parábola abre hacia arriba y si el coeficiente principal es negativo, entonces la parábola abre hacia abajo.

*Recordemos que el coeficiente principal en un **POLINOMIO** es la constante que acompaña, o multiplica, la variable de mayor grado.*

Representación esandar

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$, representa la forma estándar de la función cuadrática, donde a, b y c son constantes donde a es el coeficiente principal, y debe ser distinta de cero. El vértice es de la forma $V(-b/2a, f(-b/2a))$. Esto significa que la coordenada x, se obtiene operando, como se muestra, el valor de ?b y dividiéndolo entre dos veces el valor de a. El valor obtenido se evalúa en la función, reemplazando la variable x, por dicho valor, para a su vez, obtener el valor de la variable y.

Para trazar la gráfica de una función cuadrática, de este tipo, basta con asignar valores arbitrarios a la variable x, al lado y lado del vértice, y ubicar cada par ordenado obtenido en un plano cartesiano y trazar la curva

Representación canónica de la función cuadrática

La forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ se denomina canónica y representa una parábola vertical donde si a es positiva la parábola es cóncava hacia arriba, y si a es negativa, la parábola es cóncava hacia abajo. Su vértice es de la forma $V(h, k)$

Para trazar la gráfica de esta función, basta con igualar la función a cero y resolver la *ecuación cuadrática*, obteniendo así los puntos donde la función corta el eje x, y así, con el vértice y los interceptos, se puede trazar una gráfica aproximada.

Si en la representación canónica resolvemos el cuadrado y distribuimos el valor de a obtenemos el **POLINOMIO** de la forma $ax^2 - 2ax + ah^2 + k$, que no es más que un **POLINOMIO** la forma $ax^2 + bx + c$, esto significa, que por medio de procedimientos algebraicos podemos pasar de la representación canónica a la representación estándar, o polinómica, y viceversa.

Nota: El rango de una función cuadrática está definido desde la coordena y del vértice hasta el infinito, (h,∞), si la parábola abre hacia arriba. o desde menos infinito hasta la coordenada y del vértice, $(-\infty, h)$, cuando la parábola abre hacia abajo.

1.8 Función cúbica

Definición 1.5 Función cúbica

Se define como un POLINOMIO de grado 3 de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con a diferente de cero y b, c y d reales.

Propiedades de la función cúbica

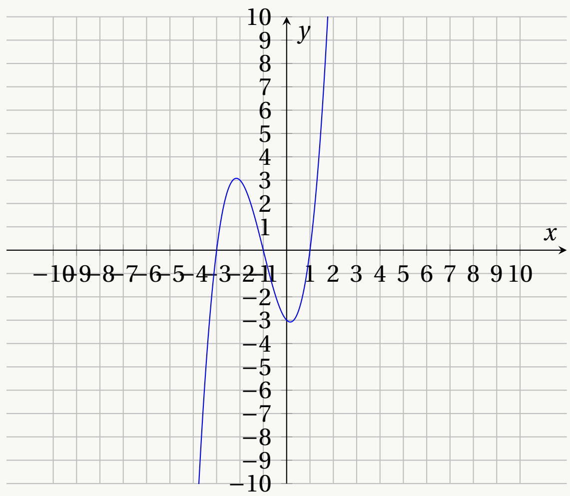
1. El dominio de la función cúbica, como para funciones Polinomiales, es todos los reales, y como en todas las funciones. polinómica de grado impar, su rango también es el conjunto de los Números Reales.

2. Si el coeficiente principal es positivo la función es siempre creciente.
3. La función tiene como mínimo, un intercepto con el eje X y un máximo de tres.

Ejemplo 1.11 –Gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 3$.

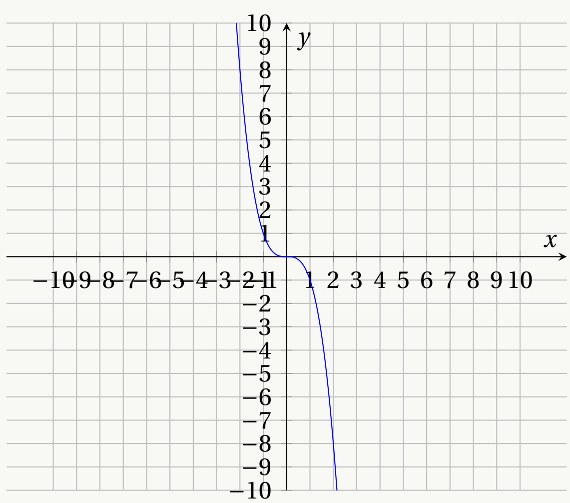
En el siguiente ejemplo, analizaremos una función cúbica con tres interceptos en el eje X, donde se hace evidente la importancia de la factorización por el método de evaluación.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 3$	Función dada
$f(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$	Factorización de polinomios de orden superior
$x = 1$, $x = -1$ y $x = -3$	Ceros de la función



Ejemplo 1.12 –Gráfica de una función cúbica decreciente.

En el siguiente ejemplo, observemos una función cúbica con coeficiente principal negativo y como esto la transforma en una función decreciente.



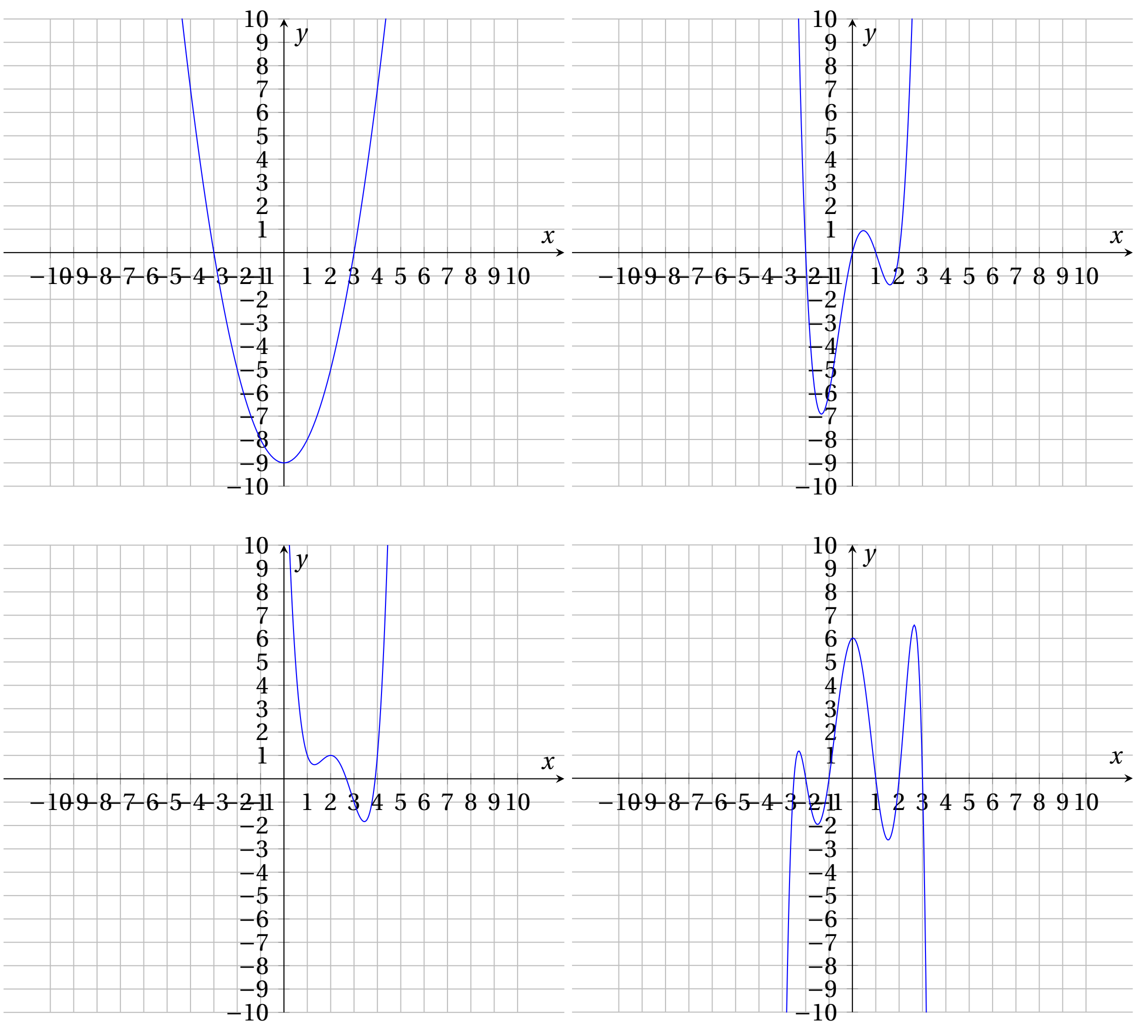
1.9 Funciones Polinomiales de orden superior.

Definición 1.6 titulo

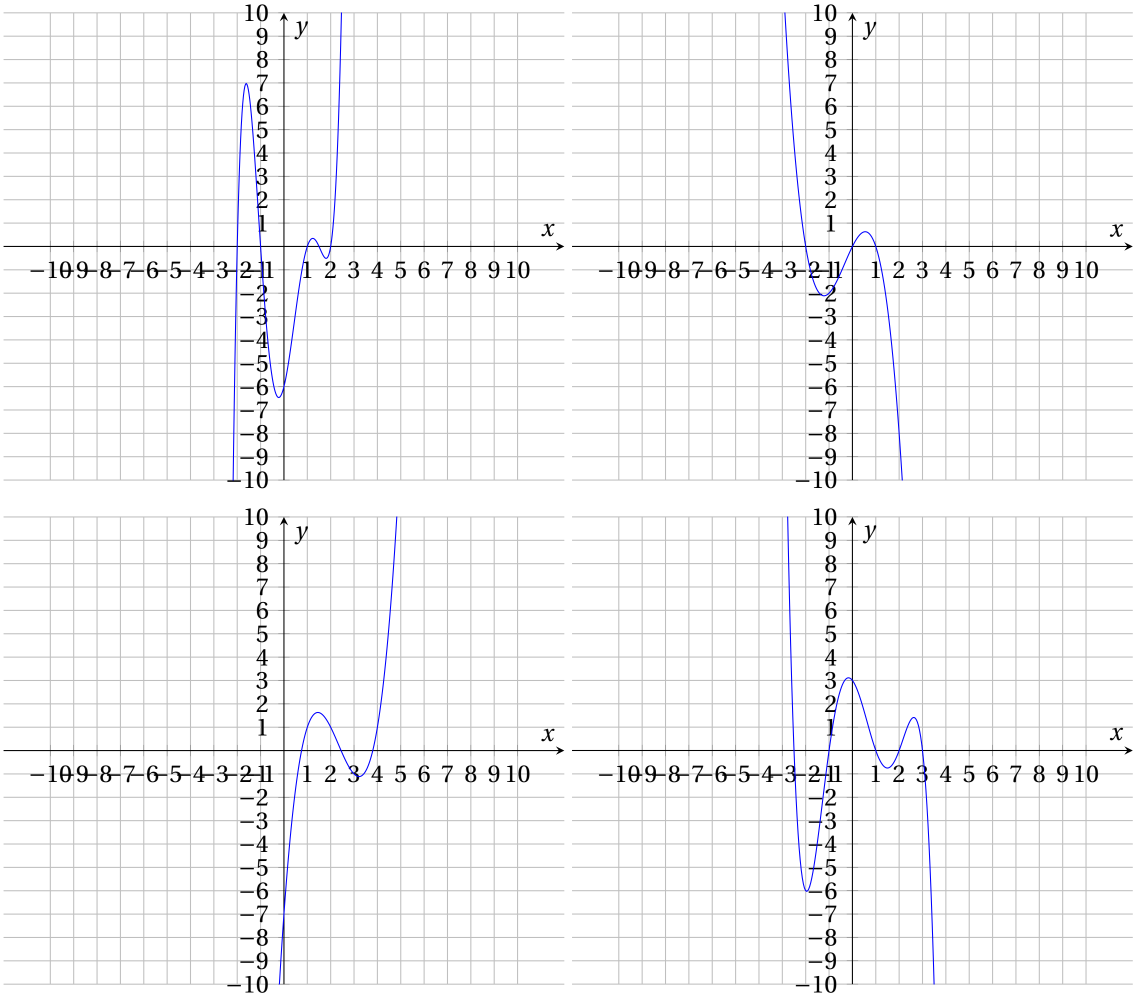
Es una funcjón polinomial de grado mayor que 2, que no se puede factoriza por los métodos usuales del álgebra de polinomios

Iniciaremos esta sección analizando las particularidades de las funciones que son polinomios grado par, las similitudes en algunos aspectos de sus gráficas y la utilización de la factorización, por el método de evaluación, para determinar los ceros del polinomio que, como ya hemos visto, son los interceptos de la gráfica con el eje x. Finalmente haremos una análisis similar para las funciones que son polinomios de grado impar.

1.9.1 Funciones de grado par



1.9.2 Funciones de grado impar



1.10 Funciones seccionalmente definidas

Definición 1.7 titulo

Las funciones que están definidas por diferentes formas en diferentes partes del dominio, son funciones seccionalmente definidas o por tramos.

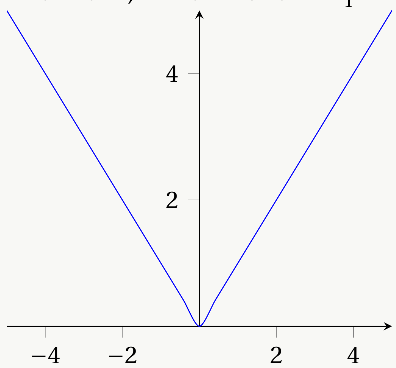
El dominio de este tipo de funciones está definido desde su estructura analítica y el rango lo podemos determinar o estimar a partir de su gráfica

1.10.1 Función Valor absoluto

El Valor absoluto de un número a, se define como la distancia desde ese número hasta el cero. La función Valor absoluto de x, se escribe, en su forma analítica como $y = f(x) = |x|$ y se define como $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$
Se puede notar que si x, toma valores positivos el Valor absoluto es el mismo número, en cambio si x, valores negativos, su Valor absoluto será siempre positivo.

Ejemplo 1.13 **–Gráfica de** $y = f(x) = |x|$.

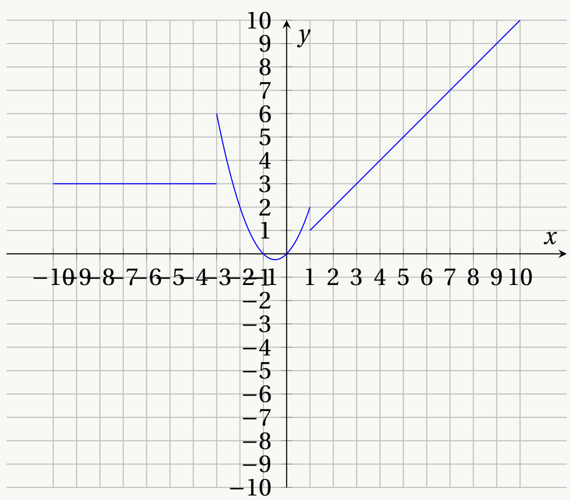
Procedemos a asignarle valores arbitrarios, pero ordenados, a la variable de la función Valor absoluto de x, ubicando cada par ordenado en un plano cartesiano y trazando una gráfica aproximada.



Función por tramos

Es otra función seccionalmente definida, veamos los ejemplos

Ejemplo 1.14 **–Graficar** $f(x) = \begin{cases} 3 & si & x \leq -3 \\ x^2 + x & si & -3 < x \leq 1 \\ x & si & 1 < x \leq 5 \end{cases}$.



1.11 Función Racional

Definición 1.8 titulo

Se define como la razón entre dos polinomios $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1} + \ldots + a_0}{b_k x^k + b_{(k-1)} x^{(k-1)} + \ldots + b_0}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$. Las a_n y b_k son constantes y a_n y b_k son distintas de cero.

1.11.1 Dominio de una función racional

La definición implica que el polinomio del denominador no puede tomar valores que lo hagan cero por tratarse de una fracción y, en ellas, el denominador cero arroja una indeterminación, así que el dominio debe excluir estos valores.

1.11.2 Asíntotas

En general, una asíntota es una recta a la cual, la gráfica de una función, se aproxima continuamente de tal manera que su distancia a la recta tiende a cero, a medida que se aproxima continua e indefinidamente. O que ambas presentan un comportamiento asintótico.

Asíntotas verticales

Las asíntotas verticales se definen a partir de los valores que hacen cero el denominador de la función racional, es decir, de los valores que no están en el dominio de la función. Y son rectas de la forma $x = a$. Cabe anotar que no todos los valores excluidos del dominio se convierten en asíntotas verticales.

Para determinar la(s) posible(s) asíntota(s) vertical(es) de una función racional, es necesario factorizar tanto el numerador como el denominador de la función racional. Si existen factores iguales en el numerador y denominador, el rango se debe determinar antes de simplificar esos valores. Las asíntotas verticales se determinan a partir de los factores del denominador que no se pueden simplificar con factores del numerador.

¿Qué ocurre con los factores del denominador que se simplificaron?, se convierten en discontinuidades de la función.

Asíntotas horizontales y asíntotas oblicuas

Desde la misma forma analítica de la función racional, se puede determinar qué tipo de asíntotas tiene, basta con observar los grados de los polinomios del numerador y denominador de la función racional, así:

Dada la función $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1} + ... + a_0}{b_k x^k + b_{(k-1)} x^{(k-1)} + ... + b_0}$

1. si $k > n$, entonces la función tiene como asíntota horizontal la recta $f(x) = 0$ $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

2. si $k = n$, entonces la función tiene como asíntota horizontal la recta $y = f(x) = \frac{a_n}{b_k}$

3. si $n = k+1$, entonces la función tiene asíntota oblicua y su ecuación es el cociente de la división de los polinomios

1.11.3 Rango de una función racional

Usualmente estimaremos el rango de las funciones racionales a partir de su gráfica, sin embargo, a manera de ejemplo, determinaremos el rango de la función $y = f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$ con el procedimiento algebraico asociado.

Ejemplo 1.15 **–Determinar el rango de la función** $y = f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2}$.

Procedimiento 1.3 –En forma analítica o algebraica

$y=\frac{x+1}{x^2+3x+2}$	Función dada
$y(x^2+3x+2)=x+1$	Multiplicando en ambos lados por x^2+x+2 y simplificando
$x^2y+3xy+2y=x+1$	Propiedad distributiva
$x^2y+3xy+2y-x-1=0$	Se iguala a cero
$x^2y+x(3y-1)+(2y-1)=0$	Se define la ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$ donde $a=y$, $b=y-1$y $c=2y-1$
$x=\frac{-3y+1\pm\sqrt{(3y-1)^2-4(y)(2y-1)}}{2y}$	Se resuelve la ecuación

Por ser una fracción con un radical, tiene dos restricciones, analicemos cada una de ellas

$[(3y-1)^2-4(y)(2y-1)]\geq 0$	Por ser subrarical
$9y^2-6y+1-8y^2+4y\geq 0$	Resolver los productos
$y^2-2y+1\geq 0$	Términos semejantes
$(y-1)^2\geq 0$	factorizando
$R-\{1\}$	Intervalo solución
$2y\neq 0$	porque el denominador no puede ser cero
$y\neq 0$	Diviendo entre 2

Esto significa que el rango de la función$y=f(x)=\frac{x+1}{x^2+3x+2}$ es $R-0,1$

NOTA: Ante la dificultad algebraica que representa determinar el rango de algunas funciones, la mayoría de los rangos se estimarán a partir de la gráfica. Más adelante, como una aplicación de las derivadas, se podrá determinar, con relativa faciliadad, el rango de cualquier función.

1.12 Función Irracional

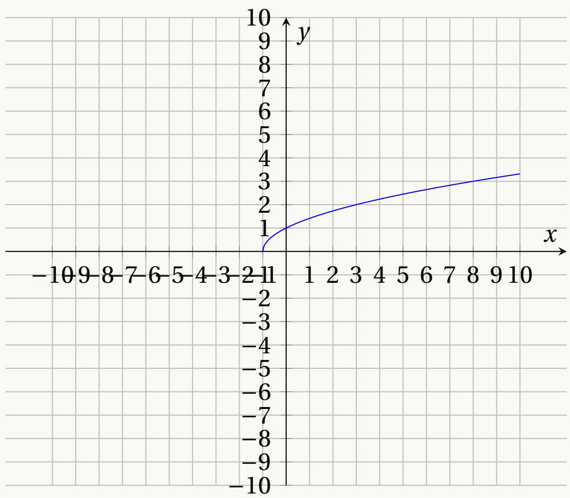
Definición 1.9 Función irracional

Son todas las funciones cuya variable está afectada por una raíz, $y=f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$, donde $g(x)$ es una función polinómica o racional.

Si n es par, entonces $g(x) \neq 0$, esta condición se debe tener en cuenta a la hora de determinar el dominio de la función.

Para trazar la gráfica de una función irracional se debe primero determinar el dominio, las restricciones de $g(x)$, los interceptos con los ejes y las asíntotas, si las tiene, para, finalmente, bosquejar una gráfica.

Ejemplo 1.16 **–Graficar $\sqrt{x+1}$.**



1.13 Función exponencial

Definición 1.10 Función exponencia

$y = f(x) = a^x$, donde a es un real positivo distinto de uno $(a \neq 0)$)y x es un número real

El dominio de la función exponencial es todos los reales y su rango se puede determinar a partir de su gráfica por resolverlo algebraicamente, de la siguiente manera:

Procedimiento 1.4 –Rango de la función exponencial

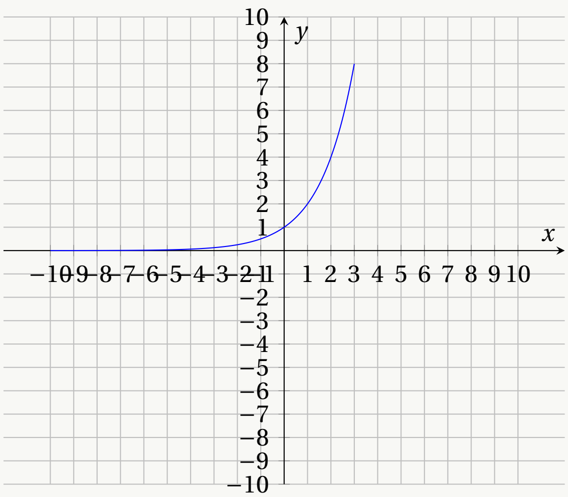
$y = a^x$	Función dada
$Lny = Ln(a^x)$	Aplicando Ln en ambos lados
$Lny = xLna$	Propiedad de los logarítmos
$\frac{Lny}{Lna} = x$	Dividiendo por Lna en ambos lados
$y = cLnx$	Renombrando las variables y haciendo $c = \frac{1}{Lna}$, con c constante Donde $x > 0$ por definición de logarítmos

La restricción de Lnx implica que el rango de la función $y = a^x$ es el intervalo $(0, \infty)$

Vemos cómo para determinar el rango de la función exponencial se hace necesario la utilización de la operación logarítmo, tema tratado en el curso de matemática operativa y de la cual se hablará en la siguiente sección para definir la función logarítmica.

Cuando en una función exponencial la variable son enteros positivos, determinar los pares ordenados es relativamente fácil, cuando la variable es un entero negativo debemos aplicar la propiedad de la potenciación $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, de manera que se convierte en una fracción con numerador uno. Si el Valor de x es una fracción entonces se debe interpretar como una raíz, cuyo índice es el denominador de la fracción del exponente, aplicando la propiedad,$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplo 1.17 –Graficas de la funciones exponenciales.



Nótese que todas las funciones cortan el eje y en el punto de coordenadas $(0,1)$. Esto se da porque todo número elevado a la cero, excepto el cero, es igual a uno. También podemos notar que el rango de la función es el intervalo abierto $(0,\infty)$

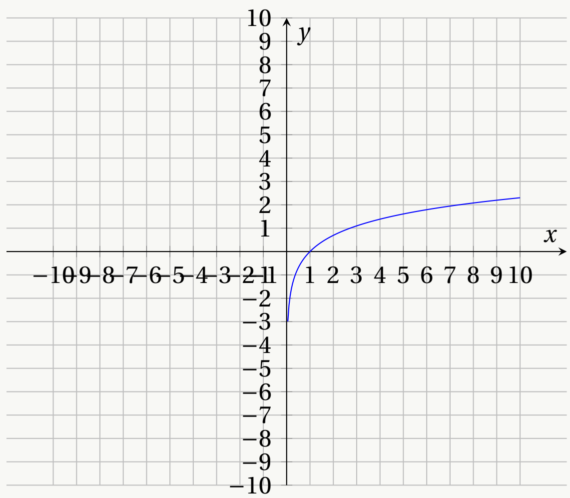
1.14 Función logarítmica

Definición 1.11 Función Logarítmica

$y = f(x) = log_a b$, Donde b es un número natural mayor que uno y a es un número R^+.

Su dominio es los R^+ y su rango es todos los reales, interseca al eje x en el punto de coordenadas $(1,0)$

Ejemplo 1.18 **–titulo.**



1.15 Funciones trigonométricas

Definición 1.12 titulo

Las funciones trigonométricas son una extensión de las razones trigonométricas al conjunto de números reales, la variable independiente se expresa en radianes y, por trigonometría, las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, se definen en términos de las funciones seno y coseno.

Para trazar las gráficas de las funciones seno y coseno utilizaremos los ángulos notables haciendo una tabla de valores que luego llevaremos al plano cartesiano.
Nos detendremos un momento en las funciones seno y coseno para analizar elementos como: dominio, rango, período y amplitud.

1.16 Función inversa

Definición 1.13 titulo

Se llama función inversa o recíproca de f, a la función f^{-1}, Si cumple que $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$, esto significa que dos funciones puede ser inversas una de la otra.

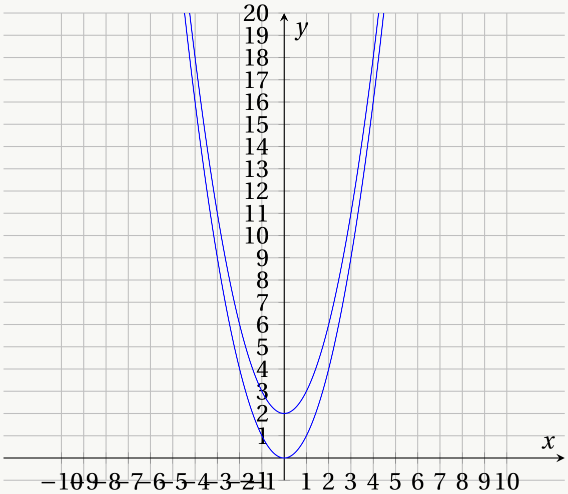
Si analizamos las funciones logaritmo y exponencial veremos que se puede obtener una de la otra mediante procesos algebraicos, y por tanto, son inversas una de la otra.

1.17 Trasformación de funciones

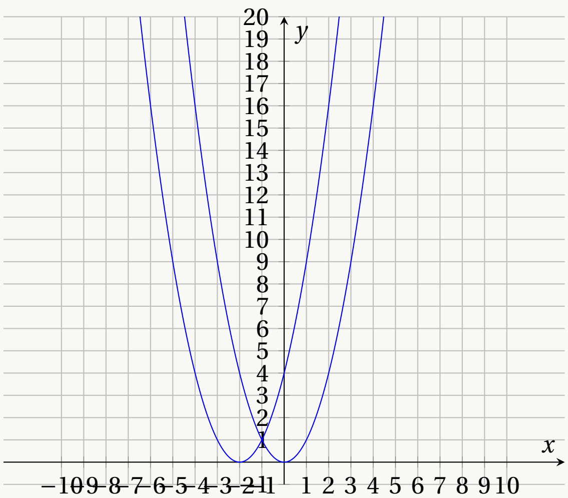
La función $f(x) = x^2$ Es una parábola con vértice en el origen y cóncava hacia arriba. Sobre ella podemos hacer algunas transformaciones algebraicas que implica, para su gráfica, traslaciones verticales u horizontales; también pueden representar dilataciones o contracciones de la curva con respecto al eje y, así mismo, puede representar una rotación de 180°, o π radianes, con respecto al eje x.

A continuación mostraremos cada una de estas transformaciones y en cada una de ellas determinaremos la gráfica transformada y la función que le corresponde, finalmente analizaremos una función cuadrática con todas las transformaciones posibles, su gráfica y su ecuación

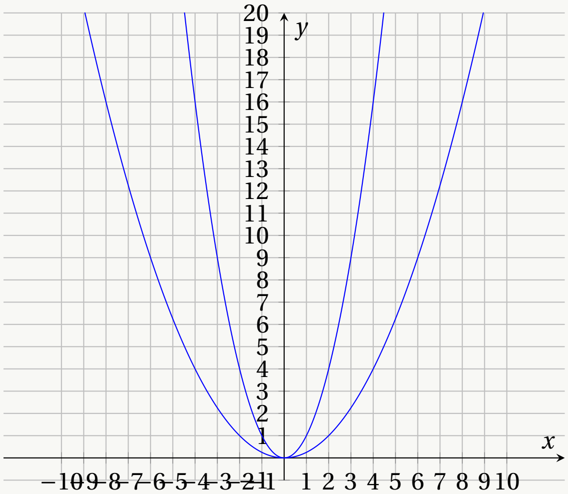
Ejemplo 1.19 **–Movimientos verticales.**



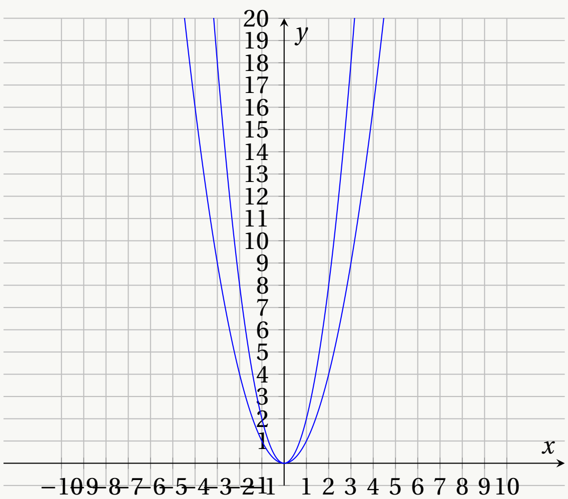
Ejemplo 1.20 **–Movimientos horizontales.**



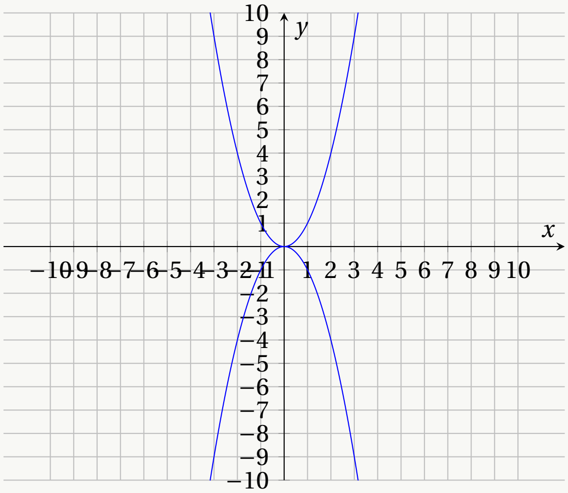
Ejemplo 1.21 **–Dilataciones.**



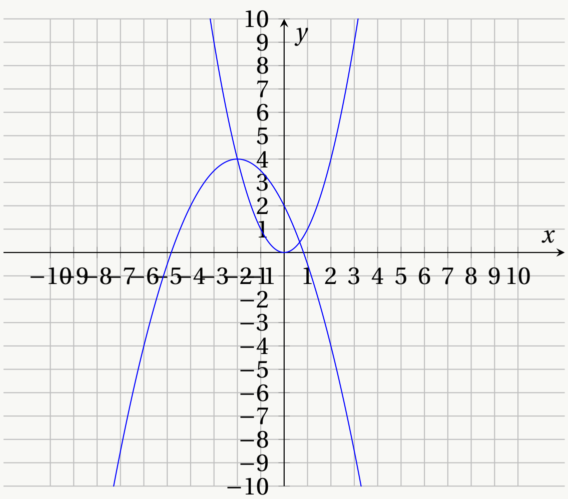
Ejemplo 1.22 **–Contracciones.**



Ejemplo 1.23 **–Rotación de π con respecto al eje x.**



Ejemplo 1.24 **–Trasformación de funciones.**



2 Límites y continuidad

2.1 Límite de una variable

Definición 2.1 titulo

El número constante a se denomina **límite de la variable** x, si para cualquier número lo suficientemente cerca a a, excepto a, está en el dominio de x. Se dice que la variable tiende al valor de a y se escribe $x?a$

Definición 2.2 titulo

La variable x tiende a infinito, si para cualquier número positivo M prefijado se puede elegir un valor de x tal que, $|x| > M$, y se escribe $x??$

2.2 Límite de una función

Definición 2.3 Límite de una función

Sea a un número sobre un intervalo y $f(x)$ una función definida en dicho intervalo, excepto quizás, en el punto a . El límite de $f(x)$ tiende, o es igual, a L cuando x tiende a a. Y se escribe $\underset{x \to a}{lim} f(x) = L$. Significa que x asume valores arbitrarios, en la vecindad (cercanos) a a, al tiempo que $f(x)$ toma valores en la vecindad (cercanos) a L.

Para que el límite exista cuando $x?a$, no es necesario que la función esté definida en el punto $x = a$. Cuando se busca el límite, se examinan los valores de la función diferentes de a.

En otras palabras, hallar el límite de una función, es analizar dicha función alrededor de un punto, mas no en el punto.

Cuando se le asignan valores a X menores que a (o por la izquierda de a), se escribe $\underset{x \to a^-}{lim} f(x) = L$

Cuando se le asignan valores a X mayores que a (o por la derecha de a), se escribe $\underset{x \to a^+}{lim} f(x) = L$

2.3 La existencia de límite

Definición 2.4 titulo

El límite existe si y solo si los límites laterales tienden hacia el mismo Valor

Propiedad 2.1 Sea f una función y c y L números reales, el límite de $f(x)$ cuaando x tiene a c es L si y sólo si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

2.4 Continuidad

Definición 2.5 Continuidad en un punto

Una función f es continia en a si se verifican las siguientes condiciones:

1. $f(a)$ está definido
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Definición 2.6 Continuidad en un intervalo

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si es continua en el intervalo abierto (a, b) y además $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existen.

Definición 2.7 Continuidad en un intervalo abierto

Una función f es continua en un intervalo abierto (a, b), si es continua en todos los puntos del intervalo

Nota: si f es continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$, diremos simplemente que la función es continua

Definición 2.8 Función discontinua

Se dice que una función f es discontinua en un punto a sí está definida en un intervalo abierto que contiene a a y no es continua en a.

Las discontinuidades pueden ser evitables y no evitables. Evitable cuando siendo f discontinua en $x = a$, puede hacerse continua redefiniéndola en $x = a$.

2.4.1 Propiedades de los límites

Sean a y b son números reales, n un entero positivo y f y g funciones que tienen límite cuando $x \longrightarrow a$, entonces se puede afirmar que:

$\lim_{x \to a} b = b$	Límite de una constante
$\lim_{x \to a} x = a$	Límite de una variable
$\lim_{x \to a} x^n = a^n$	Límite de una poencia
$\lim_{x \to a} bf(x) = b\left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$	Múltiplo escalar
$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$	Suma o diferencia
$\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]\left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$	Producto
$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$	Cociente
$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$	Potencia

Sea n un entero positivo

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$	Límite de un polinomio
$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f(a)}{g(a)},\ g(a) \neq 0$	Límite de la función racional
$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$	Límite de una función irracional

Límites trigonométricos

$$\lim_{x \to \theta} \frac{Cosk\theta - 1}{k\theta} = 0 \qquad \lim_{x \to \theta} \frac{Senk\theta}{k\theta} = b$$

2.4.2 Estrategia para resolver límites

1. Evaluar el límite

2. Si el límite es una indeterminación del tipo $0/0$, se procede a aplicar el álgebra, factorizando y tratando de simplificar la mayor cantidad de términos.

3. Evaluar de nuevo el límite aplicando las propiedades.

Ejemplo 2.1 –Determinar $\underset{x\to 4}{Lím}\sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}$.

Procedimiento 2.1

$\underset{x\to 4}{Lím}\sqrt[3]{x^2-5x-4}$	Límite dado
$\sqrt[3]{(4)^2-5*(4)-4}$	Evaluando la función en la tendencia de x
$\sqrt[3]{16-20-4}$	Resolviendo
$\sqrt[3]{-8}$	Operando el subradical
-2	Resolviendo la raíz (resultado del límite)

Ejemplo 2.2 –**Resolver** $\underset{x\to 5}{Lím}\frac{x^2-3x-10}{x^2-2x-15}$.

Procedimiento 2.2

$\underset{x\to 5}{Lím}\frac{x^2-3x-10}{x^2-2x-15}$	Límite dado
$\frac{5^2-3*5-10}{5^2-2*5-15}$	Evaluando el límite
$\frac{25-15-10}{25-10-15}$	Resolviendo las operaciones
$\frac{0}{0}$	Indeterminación resultante

En vista que el resultado de la evaluación es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, procedemos a la transformación algebraica

$\underset{x\to 5}{Lím}\frac{x^2-3x-10}{x^2-2x-15}$	Límite dado
$\underset{x\to 5}{Lím}\frac{(x+2)(x-5)}{(x+3)(x-5)}$	Factorizando numerador y denominador
$\underset{x\to 5}{Lím}\frac{(x+2)}{(x+3)}$	Simplificando los factores iguales
$\frac{5+2}{5+3}$	Evaluando el límite resultante
$\frac{7}{8}$	Resultado del límite

Ejemplo 2.3 –**Resolver** $\underset{x\to 0}{Lím}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$.

Procedimiento 2.3

$\underset{x\to 0}{Lím}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$	Límite dado
$\frac{\sqrt{3+0}-\sqrt{3}}{0}$	Evaluando
$\frac{0}{0}$	Indeterminación resultante

En vista que el resultado de la evaluación es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, procedemos a la transformación algebraica

$\underset{x\to 0}{Lím}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$	Límite dado
$\underset{x\to 0}{Lím}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x} * \frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3}}$	Multiplicando por el conjugado del denominador
$\underset{x\to 0}{Lím}\frac{(\sqrt{3+x})^2-(\sqrt{3})^2}{x(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}$	Aplicando álgebra de polinomios
$\underset{x\to 0}{Lím}\frac{3+x-3}{x(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}$	Resolviendo los cuadrados
$\underset{x\to 0}{Lím}\frac{1}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3}}$	Restando y simplificando
$\frac{1}{\sqrt{3+0}+\sqrt{3}}$	Evaluando el límite resultante
$\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$	Racionalizando. Resultado del límite

2.5 Funciones que comprenden el infinito

2.5.1 Límites infinitos. Asíntotas verticales

Definición 2.9 Límites cuando $x \longrightarrow \pm a$

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función $y = f(x)$ si cumple al menos una de las siguientes condiciones:

1. $\underset{x\to \pm a^-}{lim} f(x) = \pm\infty$

2. $\underset{x\to \pm a^+}{lim} f(x) = \pm\infty$

Ejemplo 2.4 –Determine $\underset{x\to 0^+}{Lím}\frac{1}{x}$.

Vamos a deducir el valor del límite, tabulando la función con valores cercanos a cero por derecha.

x	0	0,0000001	0,000001	0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	1
$f(x)=\frac{1}{x}$	ND	10000000	1000000	100000	10000	1000	100	10	1

Como se puede observar, a medida que el valor de x se aproxima a cero, la función toma valores cada vez más grandes; y dado que los reales son infinitos, podemos aproximarnos a cero tanto como queramos y, por tanto, la función tomará valores cada vez más grandes. Podemos deducir entoces que $\underset{x\to 0^+}{Lím}\frac{1}{x}\infty$ y por tanto, tiene una asíntota vertical en $x = 0$

2.5.2 Límites al infinito. Asíntotas horizontales

Definición 2.10 Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$

La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función $y = f(x)$ si cumple una de las siguientes condiciones:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

Como resolver límites al infinito

1. Evaluar el límite

2. Si el límite es una forma indeterminada, se procede a dividir todos los términos por la variable de mayor grado en el denominador.

3. se resuelve el límite.

Ejemplo 2.5 –Límites al infinito. Determinar $\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{x^4+x^2+1}{x^4+x+1}$

Procedimiento 2.4

$\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{x^4+x^2+1}{x^4+x+1}$	Límite dado
$\frac{\infty^4+\infty^2+1}{\infty^4+\infty+1} = \frac{\infty}{\infty}$	Evaluando el límite. Forma indeterminada
$\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{x^4+x^2+1}{x^4+x+1}$	Límite dado
$\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+\frac{x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}$	Se divide por la mayor potencia del denominador
$\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}$	Simplificando cada fracción
$\frac{1+0+0}{1+0+0}$	Aplicando propiedades de los límites
1	Resultado. Asíntota horizontal $y = 1$

Ejemplo 2.6 –Límites al infinito. Resolver $\underset{x\to\infty}{Lím}\sqrt{x^2+1}-x$

Procedimiento 2.5

$\underset{x\to\infty}{Lím}\sqrt{x^2+1}-x$	Límite dado
$\underset{x\to\infty}{Lím}\sqrt{\infty^2+1}-\infty$	Evaluando el limite
$\infty-\infty$	Forma indeterminada
$\underset{x\to\infty}{Lím}\sqrt{x^2+1}-x*\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$	Se multiplica del conjugado
$\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$	Aplicando productos notables y cancelando x^2
$\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{x}}$	Dividiendo por la mayor potencia del denominador
$\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$	Simplificando la fracción
$\frac{\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty^2}}+1}$	Evaluando el límite
$\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{0}{2}$	Resolviendo las operaciones
0	Resultado del límite. Asíntota horizontal el $y=0$

3 Derivación

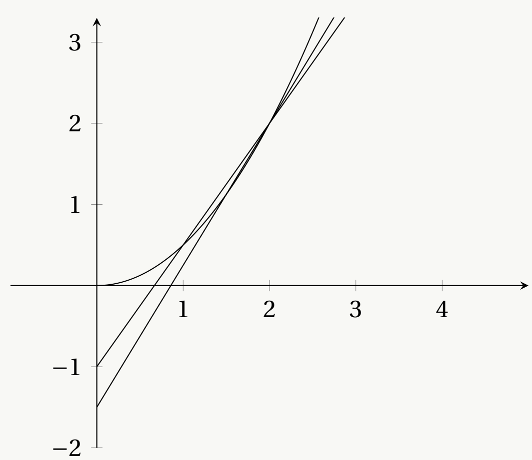
3.1 Definición geométria de la derivada

Definición 3.1 Definición geométrica de la derivada

La derivada de una función, es la pendiente de la recta tangente a la función en cualquier punto.

Para visualizar esto, vamos a estimar la pendiente de la recta tangente a una función, en un punto, a partir de rectas secantes que contengan ese punto.

Ejemplo 3.1 –Estimar el valor de la pendiente.



Como podemos ver, a medida que acercamos el punto 1 al punto 2, la resta en el denominador se aproxima de la pendiente, o tiende, a cero y el resultado de la división tiende a un número, con lo cual, podemos deducir que ése número es el valor de la pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(2,2)$

Este procedimiento lo podemos aplicar para estimar la pendiente de la recta tangente a la función $s = g(x)$ en el punto (a,b). Veamos

Ejemplo 3.2 –Calcular la velocidad instantánea.

La función $s = g(x) = x^3 + x$ representa la posición s de una partícula en cualquier momento

Podemos entonces afirmar que la velocidad instantánea del objeto, cuya función de posición es $s = g(x)$, en el punto (3,31) es 28

Este procedimiento que acabamos de hacer, se llama DERIVACIÓN y, naturalmente, existe un procedimiento simple para realizarlo, procedimiento que puede sintetizarse en el siguiente límite $\lim_{x \to \Delta x} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ donde Δx es el cambio que hemos observado en el numerador de la pendiente y Δx, el cambio en el denominador.

3.2 Definición de derivada como función

Definición 3.2 Derivada como función

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ Es equivalente a la forma $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Ejemplo 3.3 –Derivar utilizando la definición de derivada como función.

Procedimiento 3.1

$f(x) = x^2$	Función dada
$f(x+h) = (x+h)^2$	Se determina $f(x+h)$
$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$	Sustituyendo en la propiedad
$\lim_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$	Resolviendo el binomio al cuadrado
$\lim_{h \to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$	Cancelando x^2
$\lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$	Factorizando
$\lim_{h \to 0} \frac{2x+h}{1}$	simplificando h
$2x+0$	Resolviendo el límite y
$2x$	Resultado (Derivada de x^2)

3.3 Derivada y continuidad

Definición 3.3 Función derivable

Se dice que una función es derivable en a si existe su derivada en a, y es derivable en un intervalo abierto (a,b) si lo es en todos los puntos de ese intervalo.

Esto significa que si una función es derivable en un punto a, es continua en ese punto y si es derivable en un intervalo (a,b), es continua sobre ese intervalo.

A manera de Corolario, en los puntos de discontinuidad la función no puede tener derivada. La forma recíproca de esta afirmación, no es cierta, es decir la continuidad de una función $y = f(x)$ en cierto punto $x = a$ no se deduce que la función sea necesariamente derivable en ese punto.

3.4 Reglas de la derivación

Cada una de las siguientes reglas de la derivación se pueden demostrar a partir de la Definición de derivada como función y aplicado procedimientos algebraicos. Se presentan algunas de ellas.

3.4.1 Reglas básicas o generales

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	Derivada de la constante
$\frac{d}{dx}\left[f(x) + g(x)\right] = f'(x) + g'(x)$	Derivada de la sume
$\frac{d}{dx}\left[f(x) - g(x)\right] = f'(x) - g'(x)$	Derivada de la diferencia
$\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right] = cf'(x)$	Derivada de una constente por una función
$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f'(x)g'(x)$	Derivada de un producto
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	Derivada del cociente
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	Derivada de la potencia
$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x)) \bullet g'(x)$	Regla de la cadena

Ejemplo 3.4 –Derivar aplicando propiedades.

Procedimiento 3.2

$\frac{d}{dx}(x^3)$	Deivada planteada
$3x^2$	aplicando la propiedad de la potencia

3.4.2 Funciones Trigonométricas

$\frac{d}{dx}(Senx) = Cosx$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(Cotx) = -Csc^2x$

$\frac{d}{dx}(Cosx) = -Senx$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(Secx) = SecxTanx$

$\frac{d}{dx}(Tanx) = Sec^2x$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(Cscx) = -CscxCotx$

Ejemplo 3.5 –Derivar aplicando propiedades.

Procedimiento 3.3

$\frac{d}{dx}(Senx * Cosx)$	Deivada planteada
$Cosx * Cosx + Senx * (-Senx)$	aplicando la propiedad del Producto
$Cos^2x - Sen^2x$	Resolviendo el Producto

3.4.3 Funciones exponenciales y logarítmicas

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(lnx) = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x lna$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(log_a x) = \frac{1}{xlna}$

3.4.4 Funciones trigonométricas inversas

$\frac{d}{dx}\left(Sen^{-1}x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $\frac{d}{dx}\left(Cot^{-1}x\right) = -\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}\left(Cos^{-1}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $\frac{d}{dx}\left(Sec^{-1}x\right) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}\left(Tan^{-1}\right) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad$ $\frac{d}{dx}\left(Csc^{-1}x\right) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Ejemplo 3.6 –Derivar aplicando propiedades.

Procedimiento 3.4

$\frac{d}{dx}(Tan(e^x))$	Deivada planteada
$Sec^2(e^x) * e^x$	aplicando la Regla de la Cadena

3.4.5 Derivación implícita

La derivación implícita se aplica a ecuaciones que difílmente se pueden definir y en términos de x, únicamente, como $x^3+5xy+y^3=4$, por ejemplo. O en funciones como $x^2-y^2=1$, en donde resulta más cómodo derivarlas sin definirlas explícitamente.

Afortunadamente, un tipo de ecuación como las anteriores, se pueden derivar con respecto a x o a y, sin necesidad de definirla explícitamente.

A lo largo de este capítulo, hemos definido $y´$ como $\frac{dy}{dx}$, indicando que es la derivada de y con respecto a la variable x. Se hace necesario introducir la notación $x´=\frac{dx}{dy}$ que indica que estamos derivando a la variable x con respecto a la variable y.

Ejemplo **3.7** **–Dada la función $x^3+5xy+y^3=4$, determinar $\frac{dy}{dx}$.**

$x^3+5xy+y^3=4$	Ecuación dada
$\frac{d}{dx}\left(x^3+5xy+y^3\right)=\frac{d}{dx}(4)$	Derivando con respecto a x en ambos lados
$\frac{d}{dx}\left(x^3\right)+\frac{d}{dx}\left(5xy\right)+\frac{d}{dx}\left(y^3\right)=0$	Aplicando las reglas del polinomio y la constante
$3x^2+5\left(y+xy'\right)+3y^2y´=0$	Aplicando las reglas de la potencia y el producto
$3x^2+5y+5xy'+3y^2y´=0$	Propiedad distributiva
$5xy'+3y^2y´=-\left(3x^2+5y\right)$	Ley uniforme de las igualdades
$y´(5x+3y^2)=-(3x^2+5y)$	Factor común
$y´=-\frac{3x^2+5y}{5x+3y^2}$	Ley unforme de las igualdades

Ejemplo 3.8 –Dada la función $x^2 - y^2 = 1$, determinar $\frac{dx}{dy}$.

$x^2 - y^2 = 1$	Ecuación dada
$\frac{d}{dy}\left(x^2 - y^2\right) = \frac{d}{dy}(1)$	Derivando con respecto a x en ambos lados
$\frac{d}{dy}\left(x^2\right) - \frac{d}{dy}\left(y^2\right) = 0$	Aplicando las reglas del polinomio y la constante
$2xx\acute{} - 2y = 0$	Aplicando la regla de la potencia
$2xx\acute{} = 2y$	Ley uniforme de las igualdades
$x\acute{} = \frac{y}{x}$	Ley unforme de las igualdades, simplificar el 2

3.5 Aplicaciones de las derivadas

3.5.1 Máximos y mínimos, Optimización

Ejemplo 3.9 –Volumen máximo.

Una hoja rectangular de metal, mide 5 metros de ancho por 8 de largo. Si se cortan cuadrados iguales en las cuatro esquinas y se dobla el metal para formar una caja sin tapa, ¿cuál es la dimensión de los cuadrados, de manera que el volumen de la caja sea máximo?

Procedimiento 3.5 Las dimensione de la caja son $8-x$ de largo, $5-x$ de ancho y x de alto. Esto implica que el volumen de la caja es el producto de ellas. $V=(8-x)(5-x)x$

$V=(8-x)(5-x)x$	Volumen de la caja
$V=40x-8x^2-5x^2+x^3$	Resolviendo el producto
$V=x^3-13x^2+40x$	Términos semejantes
$V´=3x^2-26x+40$	Derivando la función de Volumen de la caja
$0=3x^2-26x+40$	Se iguala a cero para resolver la ecuación
$x=\frac{26\pm\sqrt{26^2-4(3)(40)}}{2(3)}$	Aplicándo fórmula general
$x_1=\frac{26+14}{6}$ y $x_2=\frac{26-14}{6}$	Resolviendo la fórnula general
$x_1=\frac{40}{6}=13{,}33$ y $x_2=\frac{12}{6}=2$	Las dos soluciones
$x=2$	Se toma esta respuesta porque la otra cantidad es mayor a cualquiera de los lados de la hoja
$8-2=6$	Largo de la caja
$5-2=3$	Ancho de la caja
2	Alto de la caja y dimensiónde los cuadrados
$V=6(3)(2)=36$	Volumen máximo de la caja

Ejemplo 3.10 –Producto máximo.

Hallar dos números positivos cuya suma sea 30, tal que su producto sea el mayor posible

Procedimiento 3.6

$x + y = 30$	la suma de dos números es 30
$x = 30 - y$	Despejando x de la primera cuación
$P = xy$	Producto de los dos números
$P = (30 - y)y$	Sustituyendo x en el producto
$P = 30y - y^2$	Propiedad ditributiva
$\frac{dp}{dy} = 30 - 2y$	Derivando al función
$0 = 30 - 2y$	Igualando a cero
$\frac{-30}{-2} = y$	Despejando y
$15 = y$	Simplificando la fracción
$x + 15 = 30$	Sustituyendo el valor de y
$x = 15$	Despejando x y realizando la operación
$P = (15)(15)$	Sustitutendo el valor de las variables en el producto
$P = 225$	Mayor producto posible

3.5.2 Razones relacionadas

Ejemplo 3.11 –Problema de la escalera.

Una escalera de 6 metros de largo se apoya contra una pared vertical. Si la base de la escalera se tira horizontalmente a razón de $\frac{1,0m}{s}$. ¿Qué tan rápido rebala la parte superior de la escalera, cuando la base se encuentra a $4m$ de la pared?

Procedimiento 3.7

	Condiciones iniciales
	Escalera cuando resbala
$15^2 = x^2 + y^2$	Relación de la longitud de la escalera, el piso y la pared
$225 = 4^2 + y^2$	Se sustituye el valor de x para determinar y despueés de resbalar
$\sqrt{225-16} = y$	Despejando y
$14{,}46 = y$	Aproximando la raíz cuadrada
$\frac{dx}{dt} = \frac{1{,}0m}{s}$	Rapidez a la que resbala la parte inferior
$\frac{dy}{dt} = ?$	Rapidez a la que esbala la parte superior
$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$	Derivando con respecto la ecuación inicial con respecto a t
$0 = 2\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$	Factorizando
$0 = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$	Simplificando el 2
$0 = (4m)\frac{3m}{s} + (14{,}46m)\frac{dy}{dt}$	evaluando los datos conocidos
$\frac{4m}{14{,}46m}\frac{3m}{s} = \frac{dy}{dt}$	Despejando $\frac{dy}{dt}$
$\frac{12m}{14{,}46s} = \frac{dy}{dt}$	Efectuando los productos
$\frac{0{,}83m}{s} = \frac{dy}{dt}$	Valocidad a la que resbala la parte superior de la escalera

Ejemplo 3.12 **–Balón Esférico.**

Un balón esférico está aumentando su volumen a razón de $\frac{4m^3}{s}$. ¿Con qué rapidez estará creciendo su radio cuando este mida $2m$?

Procedimiento 3.8

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$	Volumen de la esfera
$\frac{dV}{dt} = \frac{4m^3}{s}$	Rapidez a la que aumenta el volumen de la esfera
$\frac{dr}{dt} = ?$	Rapidez a la que crece, cambia, el radio de la esfera
$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$	Derivando la función
$\frac{4m^3}{s} = 4\pi(2m)^2 \frac{dr}{dt}$	Evaluando los valores dados
$\frac{4m^3}{16\pi m^2 s} = \frac{dr}{dt}$	Despejando $\frac{dr}{dt}$
$\frac{m}{4\pi s} = \frac{dr}{dt}$	Rapidez a la que crece el radio

3.5.3 Regla de L´Hôspital

La regla de L´Hôspital o L´Hopital, es de amplia utilización en el Cálculo Diferencial y sirve para evaluar Límites de Funciones que después de intentar resolverlos por los métodos usuales, siguen presentando indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

Propiedad 3.1 Supongamos las funciones f y g derivables y $g'(x) \neq 0$, excepto quizás en a.

$\underset{x\to a}{Lim} f(x) = 0$ y $\underset{x\to a}{Lim} g(x) = 0$

o que

$\underset{x\to a}{Lim} f(x) = \pm\infty$ $\underset{x\to a}{Lim} g(x) = \pm\infty$

Entonces

$$\underset{x\to a}{Lim} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to a}{Lim} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$$

Ejemplo 3.13 –Diferencias indeterminadas

Evaluar $\underset{x\to 0}{Lim} \left[\frac{4}{x} - \frac{1}{Senx}\right]$

Procedimiento 3.9

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{4}{x}-\frac{1}{Senx}\right]$	Límite dado
$\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}$	Se evalúa cuando $x\to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{4Senx-x}{xSenx}\right]$	Se efectúa la resta de fracciones
$\frac{4(0)-0}{0(0)}=\frac{0}{0}$	Se evalúa cuando $x\to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{4Senx-1}{Senx+xCosx)}\right]$	Se aplica la regla de L´Hôspital
$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{4(0)-1}{0+0(0)}\right]$	Se evalúa cuando $x\to 0$
$\frac{-1}{0}=-\infty$	Resultado de la evalución

Ejemplo 3.14 –Producto indeterminado.

Evaluar $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 lnx)$

Procedimiento 3.10

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 lnx)$	Límite dado
$0(-\infty)$	Se evalúa cuando $x\to 0^+$

Siempre que se tenga un producto indeterminado, se aplican las propiedades de las fracciones para transformarla en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Cuando se tenga un ln, se sugiere no operar sobre él, sino sobre el resto de la expresión y se procede así:

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 lnx)$	Límite dado
$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{lnx}{\frac{1}{x^2}}\right)$	Aplicando propiedades de las fracciones
$\frac{\infty}{\infty}$	Se evalúa cuando $x\to 0^+$
$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{lnx}{x^{-2}}\right)$	Se transforma para derivar más fácilmente
$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}\right)$	Se aplica la regla de L´Hôspital
$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^3}{2x}\right)$	Multiplicando medio y extremos
$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	Simplificando la fracción
$-\frac{0}{2}$	Se evalúa cuando $x\to 0^+$
0	Resultado de la evaluación

Definición 3.4 Potencias Indeterminadas

Las potencias indeterminadas son del tipo 0^0, ∞^0 y 1^∞ y surgen del límite $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$

Ejemplo 3.15 **–Calcular** $\lim\limits_{x \to 0} (x)^x$.

$\lim\limits_{x \to 0} (x)^x$ Función dada del tipo 0^0

El siguiente es el procedimiento sugerido para transformar una potencia indeterminada, a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, sobre la cual se puede aplicar la regla de L´Hôspital.

Procedimiento 3.11

$\lim\limits_{x \to 0} x^x$	Función dada del tipo 0^0
$y = x^x$	Se iguala la fución a y
$lny = lnx^x$	Se aplica ln en ambos lados
$lny = xlnx$	Propiedad de los logarítmos
$\lim\limits_{x \to 0} lny = \lim\limits_{x \to 0} xlnx$	Se aplica el límite en ambos lados y se transforma en un producto indeterminado
$\lim\limits_{x \to 0} lny = \lim\limits_{x \to 0} \frac{lnx}{X^{-1}}$	Propiedades de la potenciación
$\lim\limits_{x \to 0} lny = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-X^{-2}}$	Aplicando la regla de L´Hôspital
$\lim\limits_{x \to 0} lny = \lim\limits_{x \to 0} -\frac{x^2}{x}$	Producto de medio y extremos
$\lim\limits_{x \to 0} lny = \lim\limits_{x \to 0} -x$	Simplificando la fracción
$\lim\limits_{x \to 0} lny = 0$	Evaluando cuando $x \to 0$
$lny = 0$	Evaluando $\lim\limits_{x \to 0} lny$
$y = e^0$	Definición de logarítmo natural
$\lim\limits_{x \to 0} x^x = e^0 = 1$	Solución del límite

Ejemplo 3.16 **–Calcular** $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$	Función dada del tipo ∞^0
$y = x^{\frac{1}{x}}$	Se iguala la fución a y
$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}}$	Se aplica ln en ambos lados
$\ln y = \frac{1}{x}\ln x$	Propiedad de los logarítmos
$\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$	Se aplica el límite en ambos lados
$\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$	Aplicando la regla de L´Hôspital
$\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$	Simplificando
$\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = 0$	Evaluando cuando $x \to \infty$
$\ln y = 0$	Evaluando $\lim\limits_{x\to\infty} \ln y$
$y = e^0$	Definición de logarítmo natural
$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$	Solución del límite

Ejemplo 3.17 **–Calcular** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}$	Función dada del tipo 1^{∞}
$y=\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}$	Se iguala la fución a y
$lny=ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}$	Se aplica ln en ambos lados
$lny=x^2ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$	Propiedad de los logarítmos
$\lim\limits_{x\to\infty}lny=\lim\limits_{x\to\infty}x^2ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$	Se aplica el límite en ambos lados y se transforma en un producto indeterminado
$\lim\limits_{x\to\infty}lny=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)}{X^{-2}}$	Propiedades de la potenciación. Suma de fracciones
$\lim\limits_{x\to\infty}lny=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{2x+1}\left(\frac{2(2x+1)-2x(2)}{4x^2}\right)}{-2X^{-3}}$	Aplicando la regla de L´Hôspital
$\lim\limits_{x\to\infty}lny=\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{\frac{2x}{2x+1}\left(\frac{2}{4x^2}\right)}{2x^{-3}}$	Resulviendo el numerador.
$\lim\limits_{x\to\infty}lny=\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{4x^4}{8x^2(2x+1)}$	Producto de medio y extremos
$\lim\limits_{x\to\infty}lny=\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{x^2}{4x+2}$	Simplificando la fracción
$\lim\limits_{x\to\infty}lny=-\frac{\infty}{\infty}$	Evaluando cuando $x\to\infty$
$\lim\limits_{x\to\infty}lny=\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2x}{4}$	Aplicando la regla de L´Hôspital
$\lim\limits_{x\to\infty}lny=\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{x}{2}$	Simplificando la fracción
$\lim\limits_{x\to\infty}lny=\lim\limits_{x\to\infty}-\infty$	Evaluando cuando $x\to\infty$
$lny=-\infty$	Evaluando $\lim\limits_{x\to 0}lny$
$y=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}$	Definición de logarítmo natural. Propiedad de la potenciación
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}=\frac{1}{e^{\infty}}=0$	Solución del límite

Bibliografía

[1] Kline. M. (1972). *El pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días.* EEUU. Alianza Universidad.

[2] Newman. R. (1968). *SIGMA: El Mundo de las Matemáticas.* México. Grijalbo.

[3] Piskunov. N. (1997). *Cálculo Diferencial e Integral.*. Moscú. 3ra edición, Editorial MIR.

[4] Larson y otros. (1996). *Cálculo y Geometría Analítica.* España. Mc Graw Hill.

[5] Thomas G. (2010). *Cálculo una variable.* México. Pearson.

[6] Leithold. L. (1998). *El Cálculo.* México. Oxford University Press.

[7] Purcell. E y otros. (2007). *Cálculo.* México. 9na edición. Pearson.

[8] Swokowski. E. (1998). *Cálculo con Geometría Analítica.* México. 2da edición. Iberoamérica.

[9] Swokowski. E. (2009). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México. Cengage.

[10] Stewart. J. (2012). *Cálculo de una variable* México. 4ta Edición. Thomson.

[11] Stewart. J. (2012). *Precálculo, 6a. Ed.* México. Cengage.

[12] Sullivan. M. (1997). *Precálculo, 4a. Ed.* México. Prentise Hall.

[13] Hoffmann. A. (2014). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y los Negocios.* McGraw-Hill Interamericana.

[14] Bello. I. (2008). *Matemáticas Básicas Universitarias.* McGraw-Hill Interamericana.

[15] Goñi. J. (2011). *Didáctica de las Matemáticas.* Madrid. Ministerio de Educación de España - Editorial GRAÓ, de IRIF, S.L.

[16] Polya. G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* México. Trillas.

[17] Arcila. M. (2012). *Micro de Matemáticas.* Medellín. Recuperado de http://masweb.co/edu.

[18] Wolfram. S. (2007). *Math.* EEUU. Recuperado de https://www.wolframalpha.com/examples/Arithmetic.html

mi U Colmayor Es Calidad

Quédate
con el Cálculo Diferencial

Quédate en COLMAYOR!

Alcaldía de Medellín
Cuenta con vos