ISBN: 978-958-58347-3-6

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR
DE ANTIOQUIA

# Quédate
## con la Trigonometría

Quédate en COLMAYOR!

Alcaldía de Medellín
Cuenta con vos

**EDITORIAL**
COORDINADORA QUÉDATE EN COLMAYOR
**Ivón Patricia Jaramillo García**
CORRECCIÓN DE ESTILO
**Ana María Garzón Sepúlveda**
**Jhara Alejandra Bedoya Londoño**
**Eduard Alberto García Galeano**
DISEÑO GRÁFICO
**Steven Buelvas Gil**

**AUTOR**
**Yeison Emilio Gómez Noreña**

# Trigonometría. Teoría, Ejemplos y Problemas resueltos.

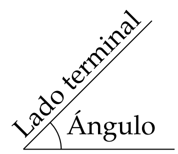
16 de julio del 2016

# Índice general

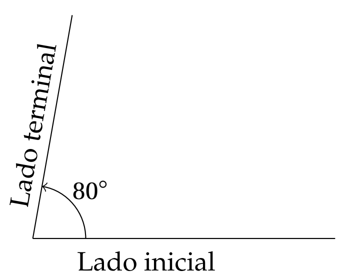
# 1 Conceptos Básicos y Operaciones entre ángulos.

## 1.1 Ángulos

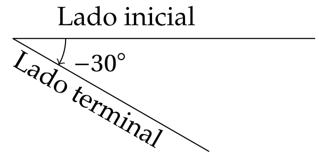
Un ángulo es la región comprendida entre dos semirrectas en el plano que tienen un punto en común, el cual es llamado vértice. Las dos semirrectas son los lados del ángulo, una es llamada lado inicial y la otra lado terminal.




En general cuando se habla de un ángulo se está haciendo referencia a su medida. La medida de un ángulo es un número que indica que tan “separados” están sus lados entre sí. También se puede pensar como lo que tiene que girar el lado terminal dejando el lado inicial fijo para que se forme el ángulo. Cuando el lado terminal se mueve en contra de las manecillas del reloj (sentido antihorario), se dice que el ángulo es positivo, mientras que si se mueve en el sentido de las manecillas del reloj (sentido horario), se dice que el ángulo es negativo.




**ángulo medido en sentido antihorario**




**ángulo medido en sentido horario**

## 1.2 Medidas de ángulos

**Sistema sexagesimal - Grados**

La unidad estándar en el sistema sexagesimal es el grado. Una circunferencia se divide en 360 grados. Un grado se

divide en 60 minutos y un minuto se divide en 60 segundos.
En la siguiente tabla se indica cual es la notación para cada una de estas unidades de medida.

| Unidad de medida | Notación |
|---|---|
| 1 grado | $1^\circ$ |
| 1 minuto | $1'$ |
| 1 segundo | $1''$ |

Algunas equivalencias importantes son:

| Valor | Equivalencia |
|---|---|
| $1^\circ$ | $60'$ |
| $1'$ | $60''$ |

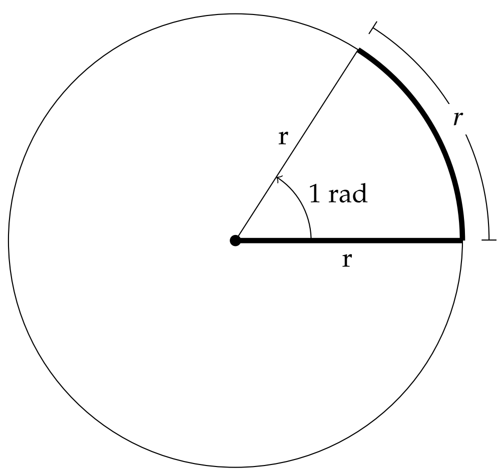
**Ejemplo 1.1**

Los siguientes números representan ángulos en el sistema sexagesimal:

| | |
|---|---|
| $90^\circ$ | Representa un ángulo que mide 90 grados. |
| $120^\circ 50'$ | Representa un ángulo que mide 120 grados y 50 minutos. |
| $25^\circ 2' 45''$ | Representa un ángulo que mide 25 grados, 2 minutos y 45 segundos. |

### Radianes

Un radian es la medida del ángulo formado en una circunferencia por dos radios cuyo arco interceptado es igual al radio.




**Ejemplo 1.2**

Los siguientes números representan ángulos medidos en radianes:

| | |
|---|---|
| $\pi$ | Representa un ángulo que mide $\pi$ radianes. |
| $\dfrac{\pi}{3}$ | Representa un ángulo que mide $\dfrac{\pi}{3}$ radianes. |
| $2\pi$ | Representa un ángulo que mide $2\pi$ radianes. |

## 1.3 Conversión entre grados y radianes

¿Cómo pasar de grados a radianes y viceversa?
La equivalencia entre grados y radianes es $180° = \pi$ rad.
Por medio de una regla de tres se puede pasar un ángulo que esté en grados a radianes y viceversa.

**Ejemplo 1.3**

¿A cuánto equivalen 35° en radianes?
Para responder a esta pregunta lo que se debe hacer es una regla de tres directa, para ello es conveniente seguir los siguientes pasos:

1. Formar dos columnas, la primera con el valor conocido y la segunda con el valor buscado, en este caso grados y radianes respectivamente.
2. Ubicar en la primera posición de cada columna valores equivalentes, por ejemplo 180° con $\pi$ rad.
3. Ubicar en la siguiente posición de la primera columna el valor de 35°, mientras que en la segunda columna una incógnita $x$ que represente el valor en radianes equivalente a 35°.

| Grados | Radianes |
|---|---|
| 180 | $\pi$ |
| 35 | $x$ |

4. Finalmente se multiplica 35 por $\pi$ y el resultado se divide por 180

$$x = \frac{35 * \pi}{180} = \frac{7\pi}{36}$$

De lo anterior se concluye que 35° equivalen a $\frac{7\pi}{36}$ radianes.

**Ejemplo 1.4**

¿A cuánto equivalen $3\pi$ radianes en grados?
Para responder a esta pregunta lo que se debe hacer es una regla de tres directa, para ello es conveniente seguir los siguientes pasos:

1. Formar dos columnas, la primera con el valor conocido y la segunda con el valor buscado, en este caso radianes y grados respectivamente.
2. Ubicar en la primera posición de cada columna valores equivalentes, por ejemplo $\pi$ rad con 180°.
3. Ubicar en la siguiente posición de la primera columna el valor de $3\pi$, mientras que en la segunda columna una incógnita $x$ que represente el valor en grados equivalente a $3\pi$.

| Radianes | Grados |
|---|---|
| $\pi$ | 180 |
| $3\pi$ | $x$ |

4. Finalmente se multiplica $3\pi$ por 180 y el resultado se divide por $\pi$

$$x = \frac{3\pi * 180}{\pi} = 540$$

De lo anterior se concluye que $3\pi$ equivalen a $540°$ grados.

De estos ejemplos se puede observar que para pasar de grados a radianes es suficiente con multiplicar el ángulo por $\frac{\pi}{180°}$, mientras que para pasar de radianes a grados basta con multiplicar el ángulo por $\frac{180°}{\pi}$.

**Ejemplo 1.5**

Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados: $45°$, $120°$, $210°$, $320°$ y $400°$

| Grados | se multiplica por $\frac{\pi}{180°}$ | Radianes |
|---|---|---|
| $45°$ | $45° \times \frac{\pi}{180°}$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| $120°$ | $120° \times \frac{\pi}{180°}$ | $\frac{2\pi}{3}$ |
| $210°$ | $210° \times \frac{\pi}{180°}$ | $\frac{7\pi}{6}$ |
| $320°$ | $320° \times \frac{\pi}{180°}$ | $\frac{16\pi}{9}$ |
| $400°$ | $400° \times \frac{\pi}{180°}$ | $\frac{20\pi}{9}$ |

**Ejemplo 1.6**

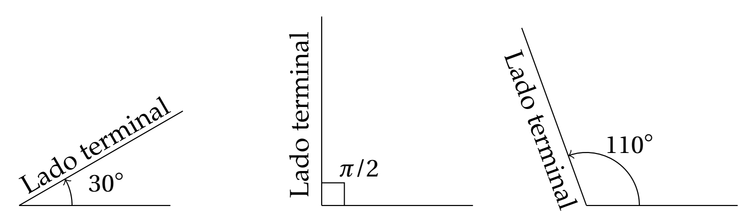
Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados: $4\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{4\pi}{3}$

| Radianes | se multiplica por $\frac{180^\circ}{\pi}$ | Grados |
|---|---|---|
| $4\pi$ | $4\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 4 \times 180^\circ$ | $720^\circ$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{1}{4} \times 180^\circ$ | $45^\circ$ |
| $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{5}{3} \times 180^\circ$ | $300^\circ$ |
| $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{3}{4} \times 180^\circ$ | $135^\circ$ |
| $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{4\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{4}{3} \times 180^\circ$ | $240^\circ$ |

### Clasificación de los ángulos según su medida.

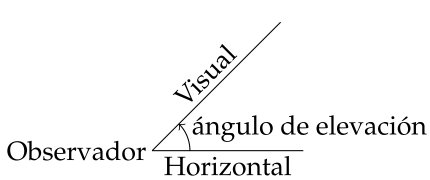
Los ángulos concavos son aquellos cuya medida es mayor que 0° y menor que 180° y se dividen en ángulos agudos, rectos y obtusos.

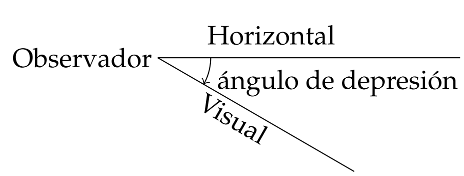
**Ángulos Agudos:** Son aquellos cuya medida es mayor que 0° y menor que 90° ( mayor que 0 radianes y menor que $\pi/2$ radianes).
**Ángulos Rectos:** Son aquellos cuya medida es igual a 90° (igual a $\pi/2$ radianes).
**Ángulos Obtusos:** Son aquellos cuya medida es mayor que 90° y menor que 180° (mayor que $\pi/2$ radianes y menor que $\pi$ radianes).




**ángulo agudo** **ángulo recto** **ángulo obtuso**

En diversidad de aplicaciones se habla de ángulos de la siguiente forma:
**Ángulo de elevación:** Es el ángulo que se forma entre la visual de un observador que mira hacia arriba y la horizontal.
**Ángulo de depresión:** Es el ángulo que se forma entre la visual de un observador que mira hacia abajo y la horizontal.



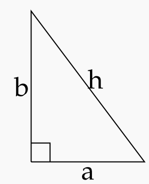



## 1.4 Triángulo rectángulo y teorema de Pitágoras

**Triángulo rectángulo:** Es aquel que tiene un ángulo recto (mide 90°) mientras que los otros dos ángulos son agudos (miden menos de 90°). El ángulo recto siempre está formado por los dos lados de menor longitud, conocidos como **catetos**, el tercer lado es llamado **hipotenusa** y es el lado de mayor longitud. El **teorema de Pitágoras** señala que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

**Teorema 1.1**

**Teorema de Pitágoras**
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

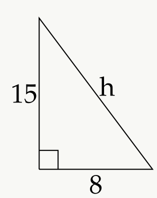



$$h^2 = a^2 + b^2$$

**Observación:** Si se conocen dos de los lados de un triángulo rectángulo, por medio del teorema de Pitagoras se puede encontrar el valor del lado restante.

**Ejemplo 1.7**

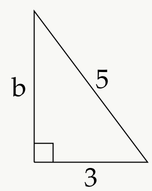
Encuentre el valor de la hipotenusa en el siguiente triángulo rectángulo.




En este caso a=8 y b=15. Si se reemplazan estos valores en el teorema de Pitagoras se obtiene:
$h^2 = 8^2 + 15^2$
$h^2 = 64 + 225$
$h^2 = 289$
$h = \sqrt{289}$
$h = 17$

**Ejemplo 1.8**

Encuentre el valor del cateto desconocido en el siguiente triángulo rectángulo.




En este caso a=3 y h=5. Si se reemplazan estos valores en el teorema de Pitagoras se obtiene:

$5^2 = 3^2 + \mathrm{b}^2$

$25 = 9 + b^2$

$25 - 9 = b^2$

$16 = b^2$

$\sqrt{16} = b$

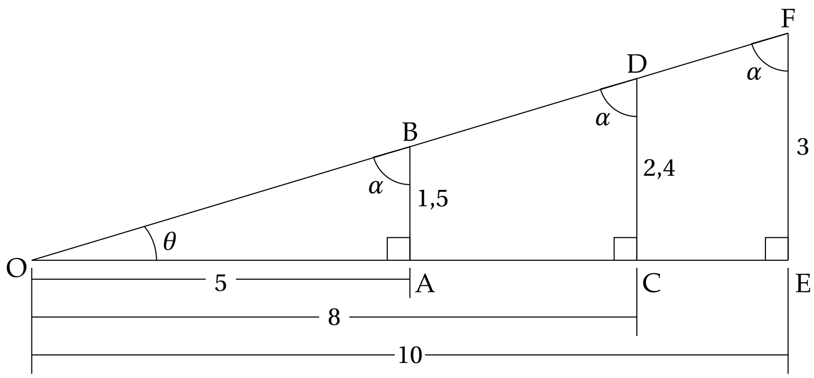
$4 = b$

$b = 4$

# 2 Trigonometría del triángulo

## 2.1 Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Todos los triángulos rectángulos tienen dos ángulos agudos y un ángulo recto. Si dos triángulos rectángulos tienen uno de sus dos ángulos agudos congruentes, se sigue que estos triángulos son semejantes. En la siguiente gráfica se ven tres triángulos rectángulos semejantes.




Los triángulos $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ y $\triangle OEF$ son semejantes, dado que tienen sus tres ángulos congruentes.

$$\text{Al tomar el cociente entre los segmentos } \overline{AB} \text{ y } \overline{OA} \text{ se obtiene } \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3$$

$$\text{Al tomar el cociente entre los segmentos } \overline{CD} \text{ y } \overline{OC} \text{ se obtiene } \frac{2{,}4}{8} = 0{,}3$$

$$\text{Al tomar el cociente entre los segmentos } \overline{EF} \text{ y } \overline{OE} \text{ se obtiene } \frac{3}{10} = 0{,}3$$

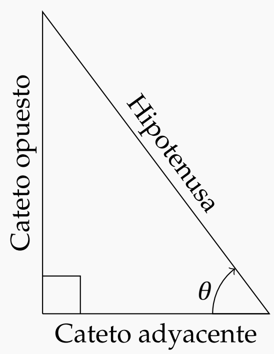
Como se puede observar, esta razón permanece constante siempre que el ángulo $\theta$ permanezca fijo y el triángulo estudiado sea un triángulo rectángulo, es decir, todos los triángulos rectángulos que tengan uno de sus ángulos agudos igual a $\theta$ cumplirán que el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente serán iguales, este cociente recibe el nombre de tangente de $\theta$ ($\tan(\theta)$). Si se toman los cocientes entre los otros lados de los triángulos, la razón obtenida también se mantendrá constante, es así como surgen las razones trigonométricas.
En general, si se tiene un triángulo rectángulo cualquiera y se toman las razones de dos de sus lados y luego se toma la razón entre los lados correspondientes de un triángulo semejante, este valor permanecerá constante. Dado que estas magnitudes no cambian, se les puede dar nombres a estas razones.

Las seis razones trigonométricas son:

| Nombre | Representación |
|---|---|
| seno | sen |
| coseno | cos |
| tangente | tan |
| cosecante | csc |
| secante | sec |
| cotangente | cot |

**Definición 2.1**

En un triángulo rectángulo las seis razones trigonométricas se definen como:

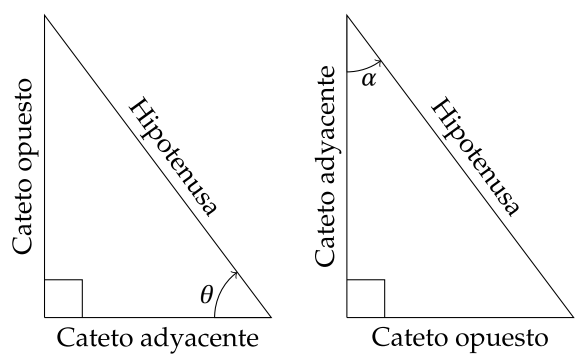



$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \csc(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

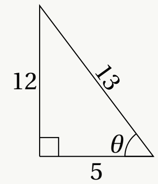
$$\tan(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot(\theta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Dependiendo de la ubicación del ángulo en el triángulo rectángulo, el cateto opuesto y el cateto adyacente cambiarán.




**Ejemplo 2.1**

Usando el siguiente triángulo rectángulo, encontrar el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo $\theta$.




**Solución:**
Lo primero que se debe hacer es identificar el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa para el ángulo $\theta$.

| Lado | Valor |
|---|---|
| Cateto adyacente | 5 |
| Cateto opuesto | 12 |
| Hipotenusa | 13 |

Luego se reemplazan estos valores en las fórmulas dadas para encontrar el valor de las razones trigonométricas.

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{12}{13} \qquad \csc(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{13}{12}$$

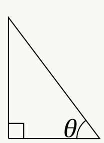
$$\cos(\theta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{13} \qquad \sec(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{13}{5}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{12}{5} \qquad \cot(\theta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{5}{12}$$

Ejemplo **2.2**

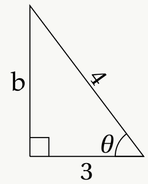
Para el ángulo agudo $\theta$ encontrar los valores de las funciones trigonométricas, si se sabe que $\cos(\theta) = \frac{3}{4}$.

**Solución:**
El primer paso para resolver este ejercicio es construir un triángulo rectángulo, con $\theta$ igual a uno de sus ángulos agudos.




$$\text{Como } \cos(\theta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{4}$$

se sigue que el cateto adyacente=3 y la hipotenusa=4:




Para encontrar el valor del cateto opuesto (b), se aplica el teorema de Pitagoras.

$$\begin{aligned} 4^2 &= 3^2 + b^2 \\ 16 &= 9 + b^2 \\ 16 - 9 &= b^2 \\ 7 &= b^2 \\ b &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

En la siguiente tabla se resumen los datos conocidos:

| Lado | Valor |
|---|---|
| Hipotenusa | 4 |
| Cateto opuesto | $\sqrt{7}$ |
| Cateto adyacente | 3 |

Por tanto, las funciones trigonométricas evaluadas en el ángulo $\theta$ son:

| Función | Definición | valor |
|---|---|---|
| $\text{sen}(\theta)$ | $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ | $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ |
| $\tan(\theta)$ | $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ | $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ |
| $\sec(\theta)$ | $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$ | $\dfrac{4}{3}$ |
| $\csc(\theta)$ | $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$ | $\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ |
| $\cot(\theta)$ | $\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$ | $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$ |

## 2.2 Valores de las funciones trigonométricas en los ángulo notables

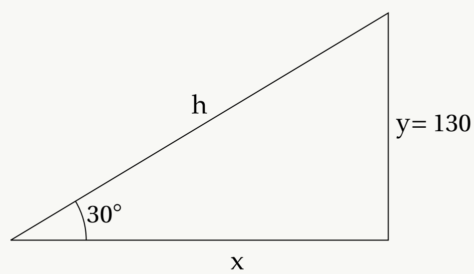
Cuando se trabaja con razones trigonométricas es conveniente tener presente el valor de éstas en los ángulos $30°, 45°$ y $60°$, dado que su aparición en ejemplos y ejercicios es muy frecuente; estos valores se resumen en la siguiente tabla.

| Ángulo | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| $\text{sen}(\theta)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos(\theta)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan(\theta)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | indefinido |

**Ejemplo 2.3**

Un piloto de un barco observa al vigía de un faro con un ángulo de elevación de 30°. Si la altura del faro es de 130m, calcular la distancia del faro al barco y la visual del piloto.

**Solución:** El primer paso para resolver este tipo de ejercicios es realizar un diagrama que represente geométricamente la situación.




En la siguiente tabla se relacionan las variables con sus respectivos valores:

| Magnitud | Variable | Valor |
|---|---|---|
| altura del faro | y | 130 |
| distancia del barco al faro | x | desconocido |
| longitud de la visual del piloto | h | desconocida |
| ángulo de elevación | | 30° |

Para encontrar el valor de h se puede usar la razón trigonométrica sen30° ya que relaciona al cateto opuesto de 30° que mide 130 con la hipotenusa que es h.

$$\begin{aligned} \text{sen}30^\circ &= \frac{130}{h} \\ \frac{1}{2} &= \frac{130}{h} \quad \text{el valor sen}30^\circ\text{se obtuvo de la tabla de ángulos notables} \\ h &= 2\cdot 130 \\ h &= 260 \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de x se puede usar el teorema de Pitagoras.

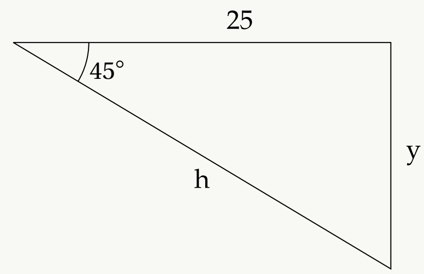
$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= h^2 \\ x^2+130^2 &= 260^2 \\ x^2+16900 &= 67600 \\ x^2 &= 67600-16900 \\ x^2 &= 50700 \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{50700} \\ x &= 130\sqrt{3} \end{aligned}$$

Se concluye que la distancia del barco al faro es de $130\sqrt{3}$m, mientras que la longitud de la visual del piloto es de 260m.

**Ejemplo 2.4**

Un electricista subido en un poste, observa a su ayudante que está en el piso a 25 metros del pie del poste, con un ángulo de depresión de 45°. Calcular la altura del poste.

**Solución:** El primer paso para resolver este tipo de ejercicios es realizar un diagrama que represente geométricamente la situación.




En la siguiente tabla se relacionan las variables con sus respectivos valores:

| Magnitud | Variable | Valor |
|---|---|---|
| altura del poste | y | desconocida |
| distancia del poste al ayudante | x | 25 |
| longitud de la visual del electricista | h | desconocida |
| ángulo de depresión | | 45° |

Para encontrar el valor de y se puede usar la razón trigonométrica tan45° ya que ésta relaciona al cateto opuesto de 45° que es y con el cateto adyacente que mide 25m.

$$
\begin{aligned}
\tan 45^\circ &= \frac{y}{25} \\
1 &= \frac{y}{25} \quad \text{el valor } \tan 45^\circ \text{se obtuvo de la tabla de ángulos notables} \\
25 &= y \\
y &= 25
\end{aligned}
$$

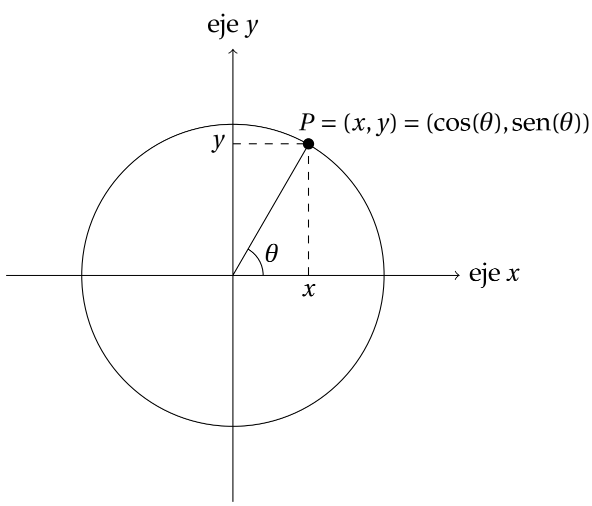
Se concluye que la altura del poste es de 25m.

# 3 Trigonometría analítica

## 3.1 Círculo unitario

Cuando se estudian las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo surge una gran limitación, pues sólo se trabaja con ángulos agudos, una manera de generalizar las razones trigonométricas de forma que se pueda trabajar con un ángulo arbitrario, es mediante el concepto de función trigonométrica, el cual es introducido usando el círculo unitario (un círculo de radio 1). Inicialmente se introducirán las funciones seno y coseno, el resto de las funciones se definirán a partir de éstas.

Primero se ubica un círculo unitario en el plano cartesiano con su centro en el punto $(0,0)$, luego se forma un ángulo cualquiera que tenga como lado inicial al eje $x$ positivo (**a estos ángulos se les llama ángulos en posición estándar**), el lado terminal del ángulo intersectará al círculo en un punto P con coordenadas $(x, y)$, la coordenada en $x$ de P se define como coseno del ángulo y la coordenada en $y$ como seno del ángulo, es decir, si el ángulo formado se llama $\theta$, entonces $\cos(\theta) = x$ y $\operatorname{sen}(\theta) = y$.




Como las coordenadas del punto de intersección P son $(x, y)$, se cumple:

$\cos(\theta) = x$
$\operatorname{sen}(\theta) = y$

Las demás funciones trigonométricas se definen en términos de las funciones seno y coseno:

$$\tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \qquad \csc(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \qquad \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

Observar que el valor de una función trigonométrica al ser evaluada en un ángulo $\theta$ en posición estándar depende solamente de la intersección del lado terminal de $\theta$ con el círculo unitario, es por eso que si los lados terminales de dos ángulos $\theta$ y $\alpha$ (ambos en posición estándar) intersectan el círculo unidad en el mismo punto, entonces:

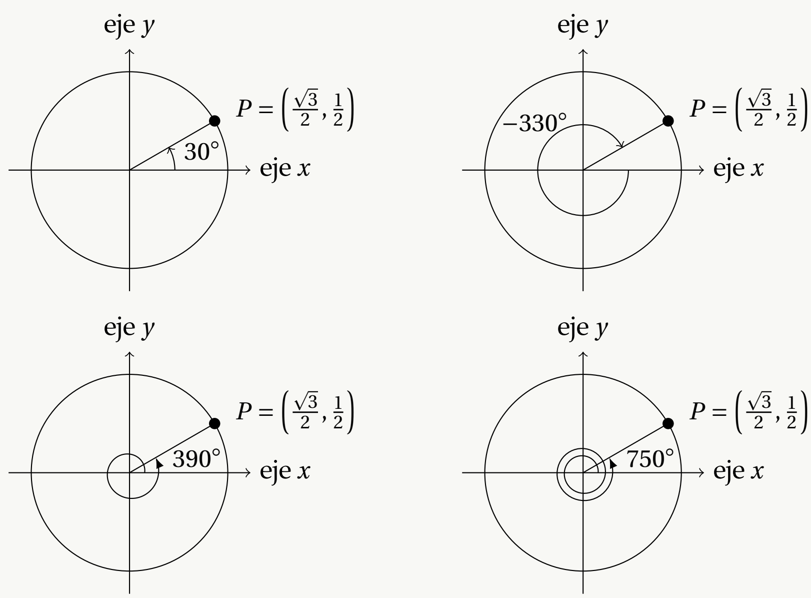
$$\begin{array}{ccc} \operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\theta) = \cos(\alpha) & \tan(\theta) = \tan(\alpha) \\ \csc(\theta) = \csc(\alpha) & \sec(\theta) = \sec(\alpha) & \cot(\theta) = \cot(\alpha) \end{array}$$

**Ejemplo 3.1**

Muestre que los ángulos 30°, −330°, 390° y 750° son coterminales y realice una gráfica en la que ubique estos tres ángulos.

**Solución:** Para mostrar que dos ángulos son coterminales se toma el ángulo menor y se le suma 360° cuantas veces sea necesario hasta obtener el ángulo mayor (también se puede proceder tomando el ángulo mayor y restandole 360° hasta obtener el ángulo menor).

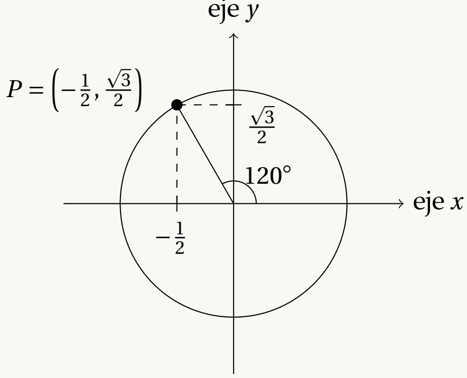
| 30° y −330° | 30° y 390° | 30° y 750° |
|---|---|---|
| −330° + 360° = 30° | 30° + 360° = 390° | 30° + 360° = 390°<br>390° + 360° = 750° |




Como se puede observar en las gráficas, el lado terminal de cada uno de los ángulos intercepta al círculo unitario en el punto $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, es decir, todos ellos son coterminales.

**Ejemplo 3.2**

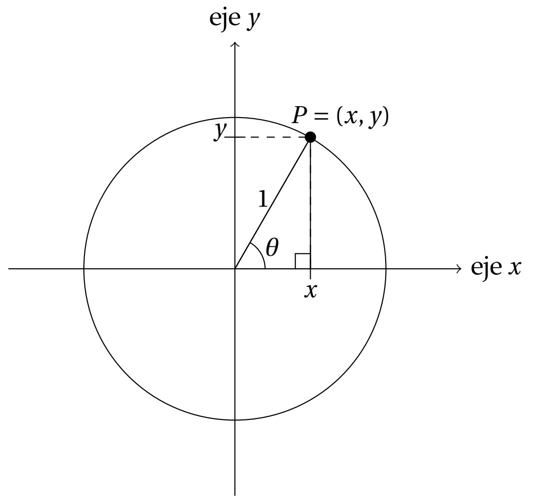
Encontrar el valor de $\operatorname{sen}(120°)$, $\cos(120°)$ y $\tan(120°)$.
En la gráfica se puede observar que el lado terminal del ángulo 120° intercepta al círculo unitario en el punto $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$




Aquí $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$ y por tanto:

- $\operatorname{sen}(120) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(120) = -\frac{1}{2}$
- $\tan(120) = -\sqrt{3}$

Cuando el ángulo formado es agudo, se tienen dos formas de calcular el valor de seno, coseno, tangente, etc, usando razones trigonométricas y usando el círculo unitario, para que no se presenten ambigüedades, estas dos definiciones deben coincidir. En la siguiente gráfica se tienen un círculo unitario y dentro de él un triángulo rectángulo,




La hipotenusa del triángulo rectángulo formado es igual a 1, el lado adyacente al ángulo $\theta$ es el segmento que va desde el origen hasta el punto $x$ cuya medida es igual a $x$, luego $\cos(\theta) = \dfrac{x}{1} = x$, por otro lado, el cateto opuesto al ángulo $\theta$ es el segmento que va desde el origen hasta el punto $y$ cuya medida es igual a $y$, luego $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{y}{1} = y$. Esto concuerda con encontrar el seno y el coseno como un punto sobre el círculo unitario. Así las dos maneras de definir las funciones trigonométricas coinciden para ángulos agudos, aunque con el círculo unitario se puede encontrar el valor de las funciones trigonométricas evaluadas en cualquier otro ángulo.

### 3.1.1 Cuadrantes

Cuando se trabaja con triángulos rectángulos las funciones trigonométricas siempre son positivas, pero al trabajar con el círculo unitario el rango de valores para los ángulos aumenta y aparece una gran diferencia, el seno o el coseno de un ángulo puede ser un número positivo o negativo, dependiendo del tamaño del ángulo. Para recordar cuando el seno o el coseno de una ángulo es positivo o negativo, es conveniente dividir el plano en cuatro partes, esto se hace naturalmente usando los ejes $x$ e $y$, estas regiones reciben el nombre de cuadrantes y se representan con números romanos I, II, III y IV en sentido antihorario. Como el valor de seno se corresponde con la coordenada $y$ del punto de intersección del lado terminal del ángulo con el círculo unitario, cuando los valores de $y$ son positivos, el valor de seno es positivo y cuando los valores de $y$ son negativos, el valor de seno es negativo. De forma similar se relaciona la función coseno con con los valores de $x$. Depués de conocer los signos de las funciones seno y coseno se pueden determinar los signos de la función tangente.

eje $y$

Cuadrante II
con $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
$\operatorname{sen}(\theta)$ +
$\cos(\theta)$ −
$\tan(\theta)$ −

Cuadrante I
con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(\theta)$ +
$\cos(\theta)$ +
$\tan(\theta)$ +

eje $x$

Cuadrante III
con $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(\theta)$ −
$\cos(\theta)$ −
$\tan(\theta)$ +

Cuadrante IV
con $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
$\operatorname{sen}(\theta)$ −
$\cos(\theta)$ +
$\tan(\theta)$ −

### 3.1.2 Ángulos de referencia

Los triángulos rectángulos son utiles para evaluar las funciones trigonométricas en ángulos agudos, esto es importante porque a partir de ellos se puede encontrar el valor de una función trigonométrica evaluada en cualquier otro ángulo. Para esto se usan los ángulos de referencia, es decir, ángulos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Todo ángulo tiene un ángulo de referencia, para encontrarlo se parte del ángulo en posición estándar, desde el punto donde el lado terminal del ángulo intersecta al círculo unitario se traza una altura hasta el eje $x$, esto forma un triángulo rectángulo y el ángulo de este triángulo localizado en el origen es el ángulo de referencia buscado. Los ángulos de referencia son importantes porque el valor de una función trigonométrica en un ángulo cualquiera es igual a la función evaluada en su ángulo de referencia excepto quizás por el signo, el cual se puede inferir a partir del cuadrante en el que esté ubicado el ángulo.

**Observación:**

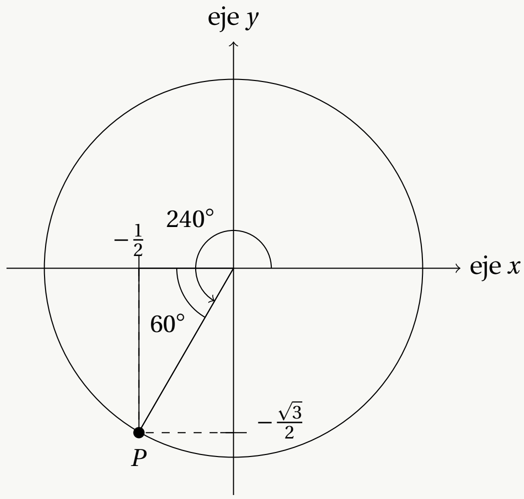
El ángulo de referencia de un ángulo $\theta$ en posición estándar cuyo lado terminal está ubicado en el segundo cuadrante es igual a $\pi - \theta$ $(180° - \theta)$.

El ángulo de referencia de un ángulo $\theta$ en posición estándar cuyo lado terminal está ubicado en el tercer cuadrante es igual a $\theta - \pi$ $(\theta - 180°)$.

El ángulo de referencia de un ángulo $\theta$ en posición estándar cuyo lado terminal está ubicado en el cuarto cuadrante es igual a $2\pi - \theta$ $(360° - \theta)$.

**Ejemplo 3.3**

Encontrar el valor exacto para el seno, el coseno y tangente del ángulo 240°.
Como el ángulo 240° está ubicado en el tercer cuadrante, para encontrar su ángulo de referencia se hace
$240° - 180° = 60°$




$240°$ tiene por ángulo de referencia a $60°$ y como $240°$ está en el cuadrante III, se sigue que sen($240°$) es negativo, cos($240°$) es negativo y tan($240°$) es positivo.

- $\text{sen}(240°) = -\text{sen}(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\cos(240°) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}$.
- $\tan(240°) = \tan(60°) = \sqrt{3}$.

**Ejemplo 3.4**

Encontrar el valor de sen($1755°$)

**Solución:** Para resolver este ejercicio primero se busca el ángulo de referencia asociado a $1755°$, el primer paso para hacer esto es restarle $360°$ hasta obtener un ángulo entre $0°$ y $360°$.

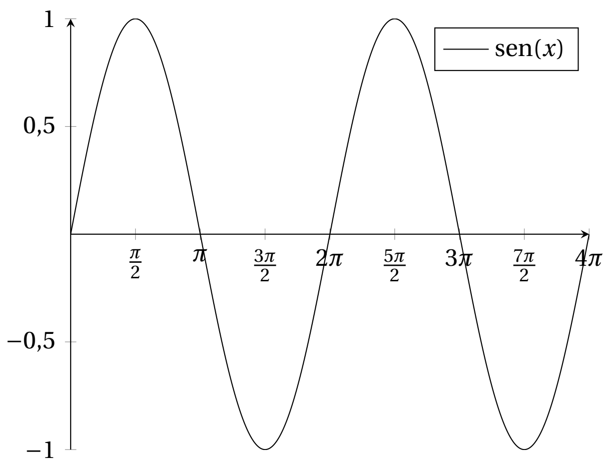
$$\begin{aligned}
1755° - 360° &= 1395° \\
1395° - 360° &= 1035° \\
1035° - 360° &= 675° \\
675° - 360° &= 315°
\end{aligned}$$

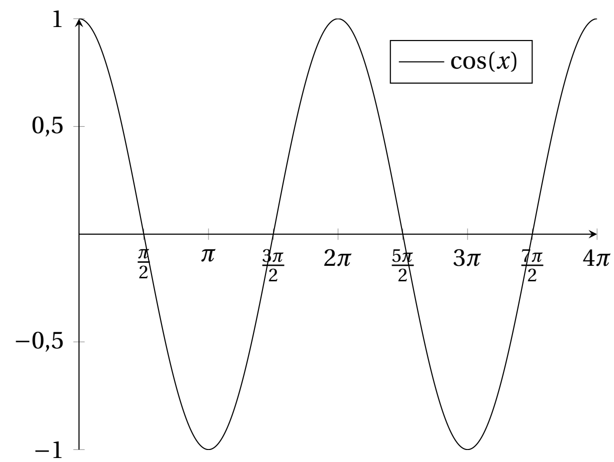
Ahora se tiene un ángulo coterminal con $1755°$ que está en el cuadrante IV y por tanto el valor de seno en este ángulo es negativo, para encontrar su ángulo de referencia se hace $360° - 315° = 45°$.
Se concluye que $\text{sen}(1755°) = \text{sen}(315°) = -\text{sen}(45°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

## 3.2 Gráficas de las funciones trigonométricas

Las funciones matemáticas son reglas que a unos elementos de entrada les asignan unos únicos elementos de salida. Al conjunto de los elementos de entrada se le llama dominio de la función, mientras que al conjunto de los elementos de salida se le llama rango de la función.
Todas las funciones matemáticas se pueden representar gráficamente en el plano cartesiano, ubicando el dominio en el eje x y el rango en el eje y, y luego situando los puntos $(x, f(x))$ donde $x$ es un elemento del dominio y $f(x)$ es su correspondiente elemento de salida bajo la función.
En el caso de las funciones trigonométricas los elementos del dominio son ángulos y los elementos del rango son números, las funciones seno y coseno pueden ser evaluadas en cualquier ángulo y es por eso que su dominio es el conjunto de todos los ángulos, que matemáticamente se puede representar como $(-\infty, \infty)$, mientras que su rango es el conjunto de todos los números entre $-1$ y $1$ que matemáticamente se puede representar como $[-1, 1]$.

Para construir el gráfico de una función hay que tener presente que ellas trabajan con parejas de números, el número de entrada y su correspondiente número de salida. Estas parejas de números se asocian con puntos en el plano al ubicar el número de entrada en el eje x y el número de salida en el eje y. Por ejemplo, $\operatorname{sen}(0) = 0$ y así un punto que está en la gráfica de la función es el punto $(0, 0)$. Si se evalua la función en un número amplio de ángulos, empiezan a surgir varias parejas de puntos que al graficarlos van formando una curva, la cual es la gráfica de la función seno. Un proceso similar se efectua para encontrar la gráfica de la función coseno.




Por definición, si $p = (x, y)$ es un punto del círculo unitario, entonces $\operatorname{sen}(\theta) = y$ para algún ángulo $\theta$, cuando el ángulo es cero, la coordena en $y$ es cero y en $\pi/2$ la coordenada en $y$ es uno. Así entre $0$ y $\pi/2$ la coordenada y aumenta desde $0$ hasta $1$; entre $\pi/2$ y $\pi$ la coordenada $y$ decrece de $1$ hasta $0$; entre $\pi$ y $3\pi/2$ continua decreciendo hasta llegar a $-1$ y finalmente entre $3\pi/2$ y $2\pi$ crece hasta llegar a $0$; cuando se analiza que pasa con la gráfica de la función se ve que a medida que el punto sigue dando vueltas en el círculo unitario, la gráfica se sigue repitiendo.
Cuando se trabaja con la representación gráfica de las funciones trigonométricas siempre se va a trabajar con radianes. Si se van a gráficar las funciones trigonométricas sería necesario evaluar la función en un amplio número de puntos para hacerse a una idea de como es la curva, sin embargo este trabajo se puede evadir si se tiene en cuenta la siguiente observación: se sabe que si dos ángulos son coterminales entonces ellos tienen el mismo valor para las funciones trigonométricas, por ejemplo $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$. En particular todas las funciones trigonométricas son repetitivas.
Para hacer la gráfica de una función trigonométrica es necesario determinar como se ve en un intervalo que contenga una revolución completa, una vez se tiene esto, basta con repetir una y otra vez este tramo de la gráfica. Las funciones que tienen esta propiedad son llamadas periodicas y la mínima cantidad de tiempo que se necesita para realizar una repetición es llamada periodo. Las funciones seno y coseno tienen periodo $2\pi$ mientras que la función tangente tiene periodo $\pi$. Las gráficas de algunas funciones exhiben simetrías, hay dos tipos especiales de simetría que surgen cuando se gráfican las funciones trigonométricas. La primera es con respecto al eje $y$, se presenta cuando la gráfica es igual a ambos lados del eje $y$, a las funciones cuyas gráficas son simétricas con respecto al eje y son llamadas funciones pares y satisfacen $f(x) = f(-x)$. Las funciones coseno y secante son funciones pares. El segundo tipo de simetría es con respecto al origen, si al rotar la gráfica 180° con respecto al origen, el resultado coincide con la gráfica inicial, entonces la función es llamada impar y satisface $-f(x) = f(-x)$. Las funciones seno, cosecante, tangente y cotangente son impares.

#### Gráfica de la función seno

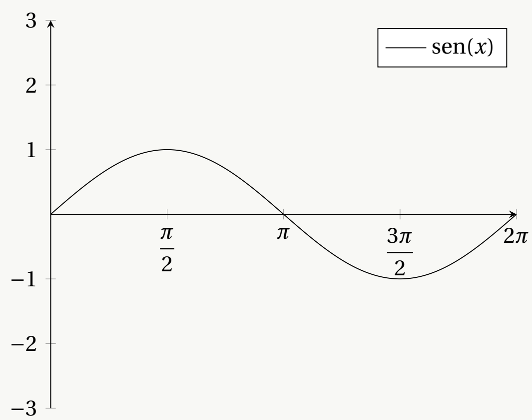
(El siguiente análisis es válido para todas las funciones trigonométricas).
Hay 4 manipulaciones básicas que se le pueden aplicar a una gráfica: moverla a la izquierda o la derecha, mover hacia arriba y hacia abajo, estirar horizontalmente y estirar vericalmente. Esto se hace mediante la adición de constantes en

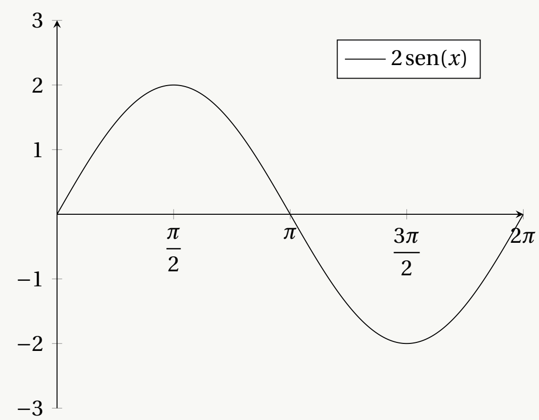
la función básica $g(x) = \text{sen}(x)$.

Si se tiene $f(x) = a\text{sen}(bx - c) + d$, el valor $a$ está fuera del argumento de la función, es por eso que afecta la salida de la función, esta constante cambia la amplitud ("la altura") del gráfico. La nueva amplitud es igual a $|a|$.
Si el valor de $a$ es negativo, entonces además de cambiar la amplitud también refleja a la gráfica con respecto al eje x.

**Ejemplo 3.5** **Amplitud**

En la función original $\text{sen}(x)$ la amplitud es igual a 1 mientras que en la función $2\text{sen}(x)$ la amplitud es igual a 2

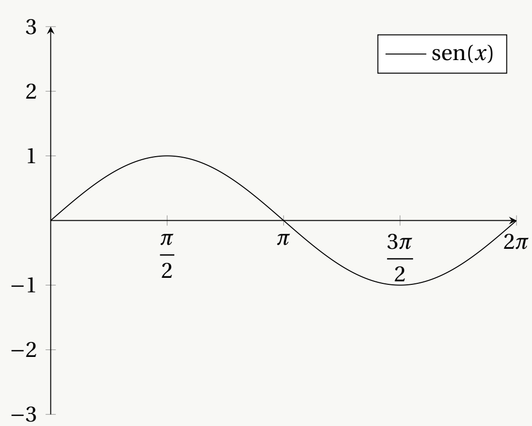


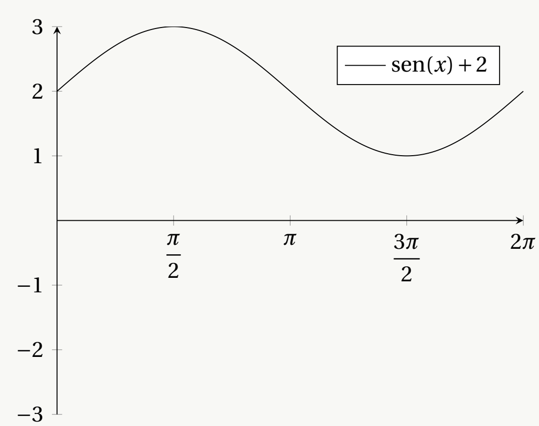




El valor $d$ está fuera del argumento de la función y por tanto su efecto se ve reflejado sobre el valor de $y$ en el gráfico. Esta constante desplazará verticalmente la curva hacia arriba o hacia abajo (esto dependiendo de si $d$ es positivo o negativo).

**Ejemplo 3.6** **Desplazamiento vertical**

La curva $f(x) = \text{sen}(x) + 2$ se traslada 2 unidades por encima de la función original $\text{sen}(x)$

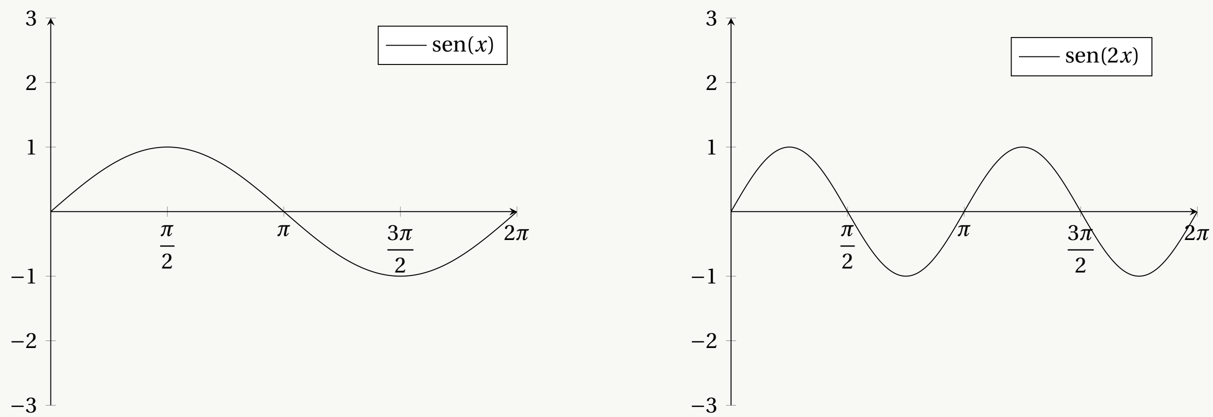



El valor $b$ hace parte del argumento de la función y así su efecto se manifiesta sobre el valor de entrada de ésta, es decir, sobre su dominio. Esta constante estira o contrae horizontalmente el gráfico de la función y cambia el valor del periodo.

**Ejemplo 3.7** **Periodo**

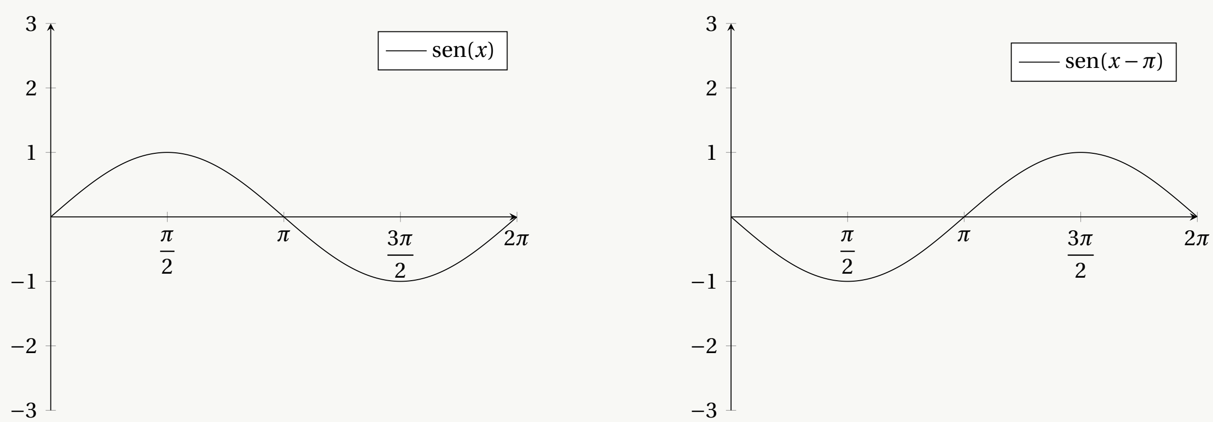
La función $f(x) = \text{sen}(2x)$ no tiene periodo igual a $g(x) = \text{sen}(x)$, el periodo puede ser encontrado por medio de la siguiente regla, si $f(x) = \text{sen}(bx)$, entonces el periodo es $2\pi/b$ (es decir, el periodo original dividido por la constante $b$), así que para la función $f(x) = \text{sen}(2x)$ el periodo es $2\pi/2 = \pi$, mientras que para la función $g(x) = \text{sen}(x)$ el periodo es $2\pi/1 = 2\pi$




El valor $c$ hace parte del argumento de la función y su efecto se manifieseta moviendo el gráfico de la función horizontalmente hacia la izquierda o hacia la derecha, por ejemplo la función $f(x) = \text{sen}(x-2)$ es igual a la gráfica de la función $g(x) = \text{sen}(x)$ desplazada horizontalmente a la derecha 2 unidades. Esta constante no es independiente de las otras, en particular, depende del valor de $b$.

**Ejemplo 3.8** **Desplazamiento horizontal**

La función $f(x) = \text{sen}(x-\pi)$ es igual a la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ desplazada horizontalmente a la derecha $\pi$ unidades.




Para la función $f(x) = a\text{sen}(bx-c)+d$, el periodo viene dado por $2\pi/b$ y un desplazamiento horizontal de $c/b$, para entender este comportamiento es importante recordar que el periodo de la función seno corresponde a una revolución alrededor del círculo unitario. Así un periodo comienza en 0 y termina en $2\pi$. Para encontrar el periodo de la función modificada hay que encontrar cuándo el argumento de la función es igual a 0 (este es el inicio del periodo) y cuando es $2\pi$ (es el el fin del periodo). En particular tenemos lo siguiente:

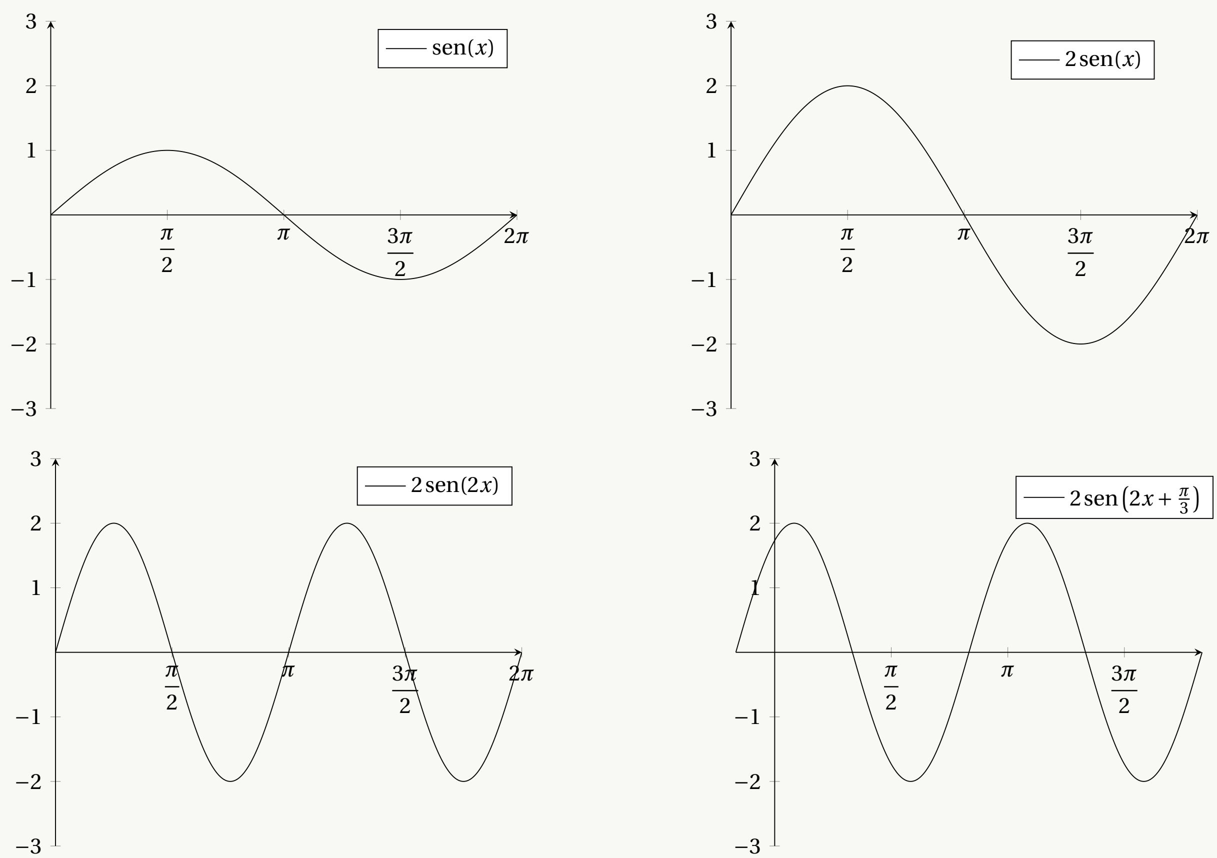
$$\textbf{Inicio} \quad bx - c = 0 \longrightarrow x = \frac{c}{b}$$
$$\textbf{Final} \quad bx - c = 2\pi \longrightarrow x = \frac{2\pi}{b} + \frac{c}{b}$$

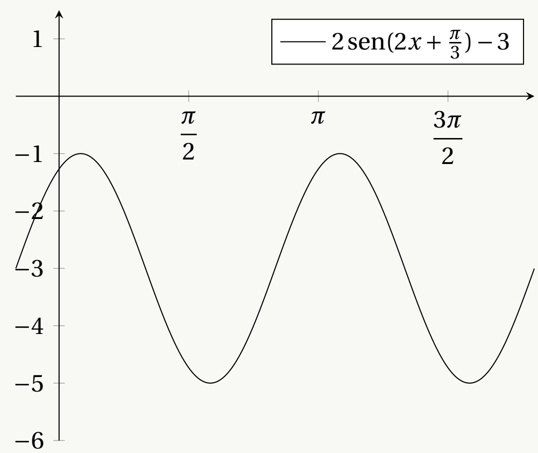
Note que el comienzo del periodo esta ahora en el valor $\frac{c}{b}$, esto es porque el desplazamiento horizontal es igual a $\frac{c}{b}$. La diferencia entre el comienzo y el final representa el periodo, es decir, la longitud que se necesita para realizar una repetición completa, y así el periodo será $\frac{2\pi}{b}$.

**Ejemplo 3.9**

Encontrar la amplitud, el desplazamiento vertical, el periodo y el desplazamiento horizontal para la función $f(x) = 2\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 3$

**Solución:** La amplitud es $a = 2$.
El desplazamiento vertical es $d = -3$.
Para encontrar el periodo se toma el valor de $b = 2$ y se divide a $2\pi$ por $b$, de donde se obtiene que $\left(\frac{2\pi}{2}\right) = \pi$.
Por último para encontrar el desplazamiento horizontal se toma el valor de $c = -\frac{\pi}{3}$ y se divide por $b = 2$, con lo que se obtiene $\frac{-\pi/3}{2} = -\frac{\pi}{6}$.





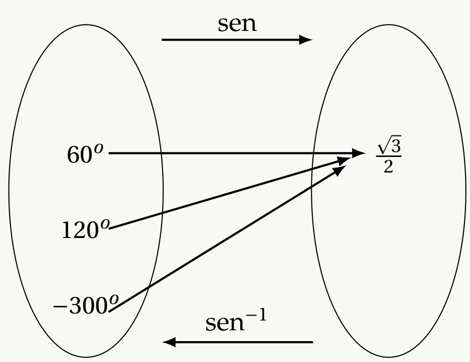

## 3.3 Funciones trigonométricas inversas

Cuando se trabaja con funciones trigonométricas el número de entrada es un ángulo, mientras que el número de salida es un valor entre $-1$ y $1$, algunas veces es necesario hacer lo opuesto, es decir, que el número de entrada sea un valor entre $-1$ y $1$ mientras que el número de salida sea un ángulo.

**Ejemplo 3.10**

Encontrar el ángulo $\theta$ tal que $\mathrm{sen}(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En la siguiente gráfica se puede observar que la función seno devuelve el valor $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cuando $\theta=60°$, $\theta=120°$ y $\theta=-300°$




Esto es equivalente a decir que la función $\mathrm{sen}^{-1}$ devuelve uno de los ángulos $\theta=60°$, $\theta=120°$ o $\theta=-300°$, cuando es evaluada en $\frac{\sqrt{3}}{2}$. La calculadora por defecto devuelve el ángulo más pequeño, en este caso devuelve el ángulo $\theta=60°$, pero cualquiera de los otros dos ángulos sería una respuesta válida.

Una función a todo elemento de entrada le tiene que asociar un único elemento de salida, es por esto que si se va a crear una función trigonométrica inversa es necesario encontrar una manera de que le asigne a todo número de

entrada un único ángulo de salida; la solución es restrigir el dominio de la función a un intervalo en el que ésta le asigne a un número un único ángulo.
Las funciones trigonométricas inversas se representan anteponiendo la expresión arc sobre la función, por ejemplo, la inversa de seno se escribe como arcsen; la de coseno, se escribe como arccos, etc.
En la siguiente tabla se resume la información más relevante relacionada con las funciones inversas.

| Función | inversa de | Dominio | Rango |
|---|---|---|---|
| arcsen | sen | $[-1,1]$ | $[-\pi/2,\pi/2]$ |
| arccos | cos | $[-1,1]$ | $[0,\pi]$ |
| arctan | tan | $(-\infty,\infty)$ | $(-\pi/2,\pi/2)$ |

Existe otra forma de representar a las funciones trigonométricas inversas y es usando el exponente $-1$, es decir, $\text{arsen}(x) = \text{sen}^{-1}(x)$. Hay que tener mucho cuidado con el uso de esta notación ya que se prodría pensar que $\text{sen}^{-1}(x) = \dfrac{1}{\text{sen}(x)} = \csc(x)$ lo cual no es correcto.
Por la naturaleza de las funciones inversas se tiene que si $y$ está en el rango de la función original, entonces se cumple que $\text{sen}(\text{arcsen}(y)) = y$, $\cos(\arccos(y)) = y$, $\text{sen}(\text{arcsen}(y)) = y$.
Si se componen estas funciones en el orden inverso, entonces las siguientes relaciones se cumplen siempre que $x$ esté en el dominio restringido de las funciones. Esto es:

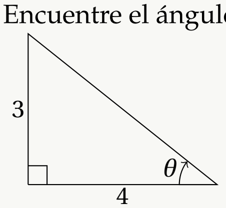
$$\text{arcsen}(\text{sen}(x)) = x \begin{cases} \text{cuando } x \text{ está entre } -\dfrac{\pi}{2} \text{ y } \dfrac{\pi}{2} \text{ rads} \\ \\ \text{cuando } x \text{ está entre } -90^\circ \text{ y } 90^\circ \end{cases}$$

$$\arccos(\cos(x)) = x \begin{cases} \text{cuando } x \text{ está entre } 0 \text{ y } \pi \text{ rads} \\ \\ \text{cuando } x \text{ está entre } 0^\circ \text{ y } 180^\circ \end{cases}$$

$$\arctan(\tan(x)) = x \begin{cases} \text{cuando } x \text{ está entre } -\dfrac{\pi}{2} \text{ y } \dfrac{\pi}{2} \text{ rads} \\ \\ \text{cuando } x \text{ está entre } -90^\circ \text{ y } 90^\circ \end{cases}$$

Ejemplo 3.11

Encuentre el ángulo $\theta$ en el siguiente triángulo:




**Solución:** Como este es un triángulo rectángulo, se pueden usar las funciones trigonométricas vistas como

razones trigonométricas. Como se conocen los catetos opuesto y adyacente con respecto a $\theta$, la función trigonométrica más adecuada para trabajar es $\tan(\theta)$ dado que esta función vista como una razón trigonométrica relaciona los catetos que ya son conocidos, con lo cual se obtiene que:
$\tan(\theta) = \dfrac{3}{4} \longrightarrow \theta = \arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)$
$\theta \approx 36{,}87^\circ$ que es equivalente a decir que $\theta \approx 0{,}6435\text{rads}$

**Ejemplo 3.12**

Encuentre todos los ángulos $\theta$ entre $0^\circ$ y $360^\circ$ tales que: $\cos(\theta) = \dfrac{2}{3}$

**Solución:** Despejando el ángulo $\theta$ se obtiene que:
$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) \approx 48{,}1896851^\circ$ ó $0{,}8411\text{rads}$
Este procedimiento sólo produce un ángulo. Todos los ángulos que son coterminales con $\theta$ también son una solución, pero aún quedan faltando otras ya que en general existirán dos ángulos con el mismo valor de **coseno** (o **seno**) en una revolución. Como se está trabajando con **coseno**, se puede encontrar el segundo ángulo haciendo lo siguiente:
La función coseno es positiva en los cuadrantes I y IV, ya se tiene una solución en el cuadrante I y falta la solución en el cuadrante IV, para encontrarla se hace $360^\circ - 48{,}1896851^\circ = 311{,}8103149^\circ$

# 4 Identidades trigonométricas

Una ecuación en la que aparecen funciones trigonométricas que se cumple para todos los valores angulares en los cuales las funciones están definidas, se llama una identidad trigonométrica.

## 4.1 Identidades trigonométricas

**Teorema 4.1 Identidades básicas**

Las siguientes expresiones trigonométricas son conocidas como identidades básicas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta}; \quad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}; \quad \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cot\theta}$$
$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}; \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}; \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\cot\theta}$$

**Teorema 4.2 Identidades Pitagoricas**

Las siguientes expresiones son conocidas como identidades pitagoricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1; \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta; \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

**Teorema 4.3 Identidades de suma y resta**

Las siguientes expresiones son conocidas como identidades de suma y resta

$$\operatorname{sen}(\theta+\beta) = \operatorname{sen}\theta\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\theta; \quad \operatorname{sen}(\theta-\beta) = \operatorname{sen}\theta\cos\beta - sen\beta\cos\theta$$
$$\cos(\theta+\beta) = \cos\theta\cos\beta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\beta; \quad \cos(\theta-\beta) = \cos\theta\cos\beta + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\theta+\beta) = \frac{\tan\theta + \tan\beta}{1 - \tan\theta\tan\beta}; \quad \tan(\theta-\beta) = \frac{\tan\theta - \tan\beta}{1 + \tan\theta\tan\beta}$$

**Teorema 4.4 Identidades de ángulo medio**

Las siguientes expresiones son conocidas como identidades de ángulo medio

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

**Teorema 4.5 Identidades de ángulo doble**

Las siguientes expresiones son conocidas como identidades de ángulo doble

$$\operatorname{sen}(2\theta)=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta; \qquad \tan(2\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta=2\cos^2\theta-1$$

**Teorema 4.6 Identidades de suma a producto**

Las siguientes expresiones son conocidas como identidades de suma a producto

$$\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\theta+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\theta+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\theta-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)$$

**Teorema 4.7 Identidades de producto a suma**

Las siguientes expresiones son conocidas como identidades de producto a suma

$$\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\theta-\beta)-\cos(\theta+\beta)\right]$$

$$\cos\theta\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\theta-\beta)+\cos(\theta+\beta)\right]$$

$$\operatorname{sen}\theta\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\theta+\beta)+\operatorname{sen}(\theta-\beta)\right]$$

## 4.2 Demostraciones

Para verificar si una ecuación que involucra funciones trigonométricas es una identidad es conveniente tener presente lo siguiente:

**Procedimiento 4.1**
1.) Conocer las ocho relaciones básicas y reconocer lasa formas alternativas de cada una.
2.) Conocer los procedimientos de adición y sustracción, reducción y transformación de fracciones en fracciones equivalentes.
3.) Conocer las técnicas de factorización y productos especiales.
4.) Usar solamente procedimientos de sustitución y de simplificación que permitan trabajar en un solo lado de la ecuación.
5.) Seleccionar el lado de la ecuación que parezca más complicado, e intentar transformarlo en el otro miembro de la ecución.
6.) Transformar independientemente, ambos lados de la ecuación en la misma forma.
7.) Evitar sustituciones que introduzcan raíces.
8.) Usar sustituciones para cambiar todas las funciones trigonométricas en expresiones que contengan únicamente senos y cosenos, para luego simplificar.
9.) Multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por el conjugado de cualquiera de ellos.
10.) Simplificar la raíz cuadrada de una fracción utilizando conjugados para transformarla en el cociente con cuadrados perfectos.

**Ejemplo 4.1** **Pasando todo a terminos de senos y cosenos**

Verificar que $\dfrac{\sec(x)}{\csc(x)} = \dfrac{1}{\cot(x)}$

**Solución:** El primer paso es tomar el lado más complejo, en este caso $\dfrac{\sec(x)}{\csc(x)}$
El segundo paso es llevar todo a terminos de senos y cosenos, para ello se usan las identidades básicas

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}; \quad \csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

y se subtituyen en la expresión elegida

$$\begin{aligned}
\frac{\sec(x)}{\csc(x)} &= \frac{\frac{1}{\cos(x)}}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} && \text{Ahora se aplica la ley de extremos y medios} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} && \text{Se aplica una identidad básica} \\
&= \tan(x) && \text{Se aplica una identidad básica} \\
&= \frac{1}{\cot(x)}
\end{aligned}$$

**Ejemplo 4.2** **Pasando todo a terminos de senos y cosenos**

Verificar la identidad $\cos(x)\tan(x) = \text{sen}(x)$

**Solución:** El primer paso es tomar el lado más complejo, en este caso $\cos(x)\tan(x)$
El segundo paso es llevar todo a terminos de senos y cosenos, para ello se usa la identidad básica

$$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

y se subtituye en la expresión elegida

$$\begin{aligned} \cos(x)\tan(x) &= \cos(x)\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \quad \text{Ahora se simplifica} \\ &= \text{sen}(x) \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.3** **Pasando todo a terminos de senos y cosenos**

Verificar $\dfrac{\cot(x)}{\csc(x)} = \cos(x)$

**Solución:** El primer paso es tomar el lado más complejo, en este caso $\dfrac{\cot(x)}{\csc(x)}$
El segundo paso es llevar todo a terminos de senos y cosenos, para ello se usan las identidades básicas

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}; \quad \csc(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

y se substituyen en la expresión elegida

$$\begin{aligned} \frac{\cot(x)}{\csc(x)} &= \frac{\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}}{\frac{1}{\text{sen}(x)}} \quad \text{Ahora se aplica la ley de extremos y medios} \\ &= \frac{\text{sen}(x)\cos(x)}{\text{sen}(x)} \quad \text{Aquí se simplifica} \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.4** **Pasando todo a terminos de senos y cosenos**

Verificar la siguiente identidad $\tan(\theta) + \cot(\theta) = \sec(\theta)\csc(\theta)$

**Solución:** El primer paso es tomar es tomar el lado más complejo, en este caso $\tan(\theta) + \cot(\theta)$
El segundo paso es llevar todo a terminos de senos y cosenos, para ello se usan las identidades básicas

$$\tan(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}; \quad \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}$$

y se substituyen en la expresión elegida

$$
\begin{aligned}
\tan(\theta)+\cot(\theta) &= \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}+\frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} && \text{Ahora se suman las fracciones}\\
&= \frac{\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta)\cos(\theta)}{\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)} && \text{Se aplica una identidad pitagorica}\\
&= \frac{1}{\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)}\\
&= \frac{1}{\cos(\theta)}\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} && \text{Se aplican identidades básicas}\\
&= \sec(\theta)\csc(\theta)
\end{aligned}
$$

**Ejemplo 4.5** **Pasando todo a terminos de senos y cosenos**

Verificar $\sec(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))=\cos(x)$

**Solución:** El primer paso es tomar el lado más complejo, en este caso $\sec(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))$
El segundo paso es llevar todo a termonos de senos y cosenos, para ello se usa la identidad

$$\sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}$$

la cual se substituye en la expresión elegida

$$
\begin{aligned}
\sec(x)(1-\operatorname{sen}^2(x)) &= \frac{1}{\cos(x)}(1-\operatorname{sen}^2(x)) && \text{Ahora se utiliza una identidad pitagorica}\\
&= \frac{1}{\cos(x)}(\cos^2(x)) && \text{Ahora se simplifica}\\
&= \cos(x)
\end{aligned}
$$

**Ejemplo 4.6** **Usando factorización**

Verificar $\operatorname{sen}^4(x)-\cos^4(x)=2\operatorname{sen}^2(x)-1$

**Solución:** El primer paso es tomar el lado más complejo, en este caso $\operatorname{sen}^4(x)-\cos^4(x)$
El segundo paso es factorizar la expresión elegida

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4(x)-\cos^4(x) &= (\operatorname{sen}^2(x)-\cos^2(x))(\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x))\\
&= (\operatorname{sen}^2(x)-\cos^2(x)) && \text{Se utilizó la identidad pitagorica } \operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1\\
&= \operatorname{sen}^2(x)-(1-\operatorname{sen}^2(x)) && \text{Se utilizó } \cos^2(x)=1-\operatorname{sen}^2(x)\\
&= \operatorname{sen}^2(x)-1+\operatorname{sen}^2(x)\\
&= 2\operatorname{sen}^2(x)-1
\end{aligned}
$$

**Ejemplo 4.7** **Multiplicando por la conjugada**

Verificar $\dfrac{\cos(\theta)\cot(\theta)}{1-\operatorname{sen}(\theta)}-1=\csc(\theta)$

**Solución:** El primer paso es tomar el lado más complejo, en este caso $\dfrac{\cos(\theta)\cot(\theta)}{1-\operatorname{sen}(\theta)}-1$

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(\theta)\cot(\theta)}{1-\operatorname{sen}(\theta)}-1 &= \frac{\cos(\theta)(\cos(\theta)/\operatorname{sen}(\theta))}{1-\operatorname{sen}(\theta)}-1 && \text{Se pasó todo a terminos de senos y cosenos}\\
&= \frac{\cos^2(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)(1-\operatorname{sen}(\theta))}-1\\
&= \left(\frac{\cos^2(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)(1-\operatorname{sen}(\theta))}\right)\left(\frac{1+\operatorname{sen}(\theta)}{1+\operatorname{sen}(\theta)}\right)-1 && \text{Se multiplicó por la conjugada}\\
&= \frac{\cos^2(\theta)(1+\operatorname{sen}(\theta))}{\operatorname{sen}(\theta)(1-\operatorname{sen}^2(\theta))}-1 && \text{Se aplicó un producto notable}\\
&= \frac{\cos^2(\theta)(1+\operatorname{sen}(\theta))}{\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)}-1 && \text{Se aplicó una identidad pitagorica}\\
&= \frac{1+\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}-1 && \text{Se simplificó}\\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}+\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}-1\\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}+1-1\\
&= \csc(\theta) && \text{Se aplicó una identidad fundamental}
\end{aligned}
$$

**Ejemplo 4.8** **Multiplicando por la conjugada**

Verificar $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}=\csc(x)-\cot(x)$

**Solución:** El primer paso es tomar el lado más complejo, en este caso $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)} &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}\,\frac{1-\cos(x)}{1-\cos(x)} && \text{Se multiplicó por la conjugada del denominador}\\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(x))}{1-\cos^2(x)} && \text{Se aplicó un producto notable}\\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(x))}{\operatorname{sen}^2(x)} && \text{Se aplicó una identidad pitagorica}\\
&= \frac{(1-\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)} && \text{Se simplificó}\\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}-\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\\
&= \csc(x)-\cot(x) && \text{Se aplicaron identidades funciones fundamentales}
\end{aligned}
$$

# 5 Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es aquella en la que las incógnitas aparecen formando parte de los argumentos de funciones trigonométricas, como las incógnitas son ángulos, si existe alguna solución, entonces van a existir infinitas, pero normalmente bastará con dar las soluciones comprendidas entre 0° y 360° (0 y $2\pi$).
Es importante resaltar que no existe un método general para resolver una ecuación trigonométrica, aunque dependiendo de la forma de la ecuación en ocasiones es posible aplicar alguno de los siguientes métodos:

## 5.1 Despeje directo

Existen ecuaciones trigonométricas que se resuelven simplemente despejando la función trigonométrica y luego aplicando la función inversa para despejar el argumento.

**Procedimiento 5.1**
Los pasos que se pueden seguir para resolver una ecuación de este tipo son:
1.) Despejar la función trigonométrica
2.) Aplicar la función inversa a ambos lados de la ecuación
3.) Despejar la variable

Ejemplo 5.1

Encuentre el valor de **x** que satisface la ecuación trigonométrica

$$\tan(3x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**Solución:** Primero se despeja la función trigonométrica.

$$\tan(3x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$\tan(3x) = 1$$

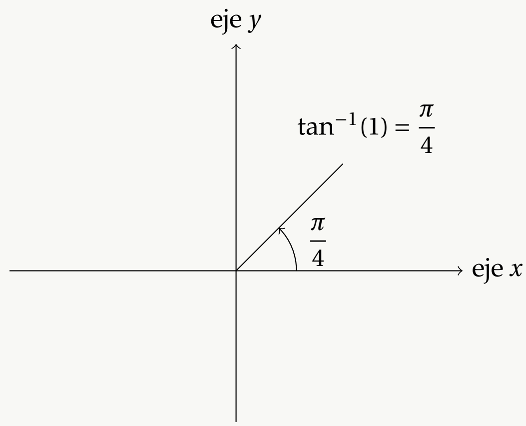
Ahora se aplica la función inversa a ambos lados de la ecuación.

$$3x = \tan^{-1}(1)$$

Como se está evaluando la función $\tan^{-1}$ en un número positivo, $\tan^{-1}(1)$ tiene dos soluciones entre 0 y $2\pi$, las cuales se encuentran en el primer y tercer cuadrantes. Al evaluar $\tan^{-1}(1)$ en la calculadora en modo radianes, se obtiene $\dfrac{\pi}{4}$, valor que permite calcular la primera solución.

**<u>Primer cuadrante</u>**

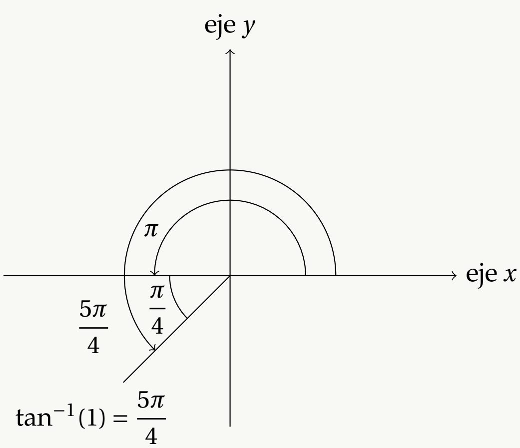
$$3x = \frac{\pi}{4}$$
$$x = \frac{\pi}{4*3}$$
$$x = \frac{\pi}{12}$$




Para encontrar el valor de $\tan^{-1}(1)$ en el tercer cuadrante lo que se hace es sumarle $\pi$ al valor de $\tan^{-1}(1)$ obetenido en el primer cuadrante, es decir, $\pi + \frac{\pi}{4}$. La otra solución se encuentra cuando $\tan^{-1}(1) = \pi + \frac{\pi}{4}$, para obtenerla se resuelve la ecuación $3x = \pi + \dfrac{\pi}{4}$

**<u>Tercer cuadrante</u>**

$$3x = \frac{\pi}{4} + \pi$$
$$3x = \frac{4\pi + \pi}{4}$$
$$x = \frac{5\pi}{12}$$




Las soluciones son: $\dfrac{\pi}{12}$ y $\dfrac{5\pi}{12}$

**Ejemplo 5.2**

Encuentre el valor de $\theta$ que satisface la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}(1 + 3\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

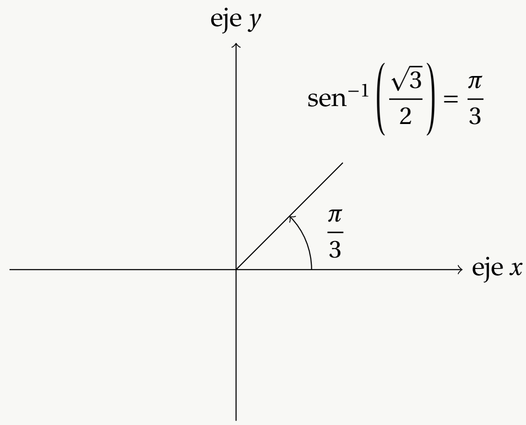
**Solución:** En este caso la función ya está despejada. Ahora se aplica la función inversa a ambos lados de la ecuación.

$$1+3\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Como se está evaluando la función $\text{sen}^{-1}$ en un número positivo, $\text{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ tiene dos soluciones entre $0$ y $2\pi$, las cuales se encuentran en el primer y segundo cuadrantes. Al evaluar $\text{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ en la calculadora en modo radianes, se obtiene $\frac{\pi}{3}$, valor que permite calcular la primera solución.

**Primer cuadrante**

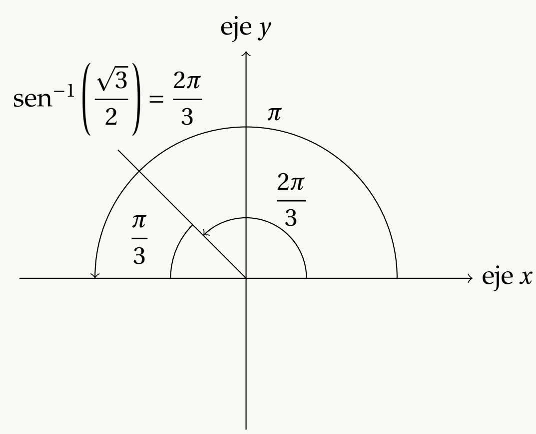
$$\begin{aligned}
1+3\theta &= \frac{\pi}{3}\\
3\theta &= \frac{\pi}{3}-1\\
3\theta &= \frac{\pi-3}{3}\\
\theta &= \frac{\pi-3}{9}
\end{aligned}$$




Para encontrar el valor de $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)$ en el segundo cuadrante se toma el valor de $\pi$ y se le resta el valor de $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)$ obetenido en el primer cuadrante, es decir, $\pi-\frac{\pi}{3}$. La otra solución se encuentra cuando $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)=\pi-\frac{\pi}{3}$ , para obtenerla se resuelve la ecuación $1+3\theta=\pi-\frac{\pi}{3}$.

**Segundo cuadrante**

$$\begin{aligned}
1+3\theta &= \pi-\frac{\pi}{3}\\
1+3\theta &= \frac{3\pi-\pi}{3}\\
3\theta &= \frac{2\pi}{3}-1\\
3\theta &= \frac{2\pi-3}{3}\\
\theta &= \frac{2\pi-3}{9}
\end{aligned}$$




Las soluciones entre $0$ y $2\pi$ son: $\frac{\pi-3}{9}$ y $\frac{2\pi-3}{9}$

**Ejemplo 5.3**

Encuentre el valor de x que satisface la ecuación trigonométrica

$$\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

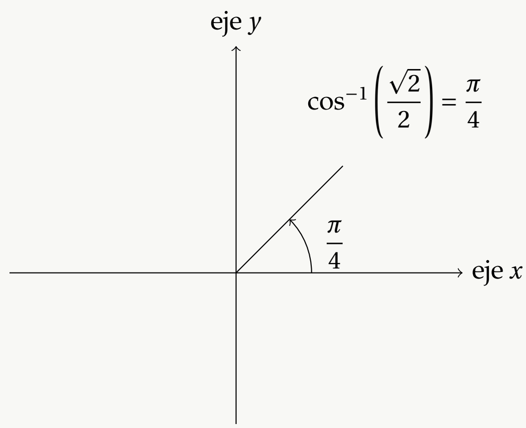
**Solución:** En este caso la función ya está despejada. Ahora se aplica la función inversa a ambos lados de la ecuación.

$$2x = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Como se está evaluando la función $\cos^{-1}$ en un número positivo, $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$ tiene dos soluciones entre 0 y $2\pi$, las cuales se encuentran en el primer y cuarto cuadrantes. Al evaluar $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$ en la calculadora en modo radianes, se obtiene $\frac{\pi}{4}$, valor que permite calcular la primera solución.

**Primer cuadrante**

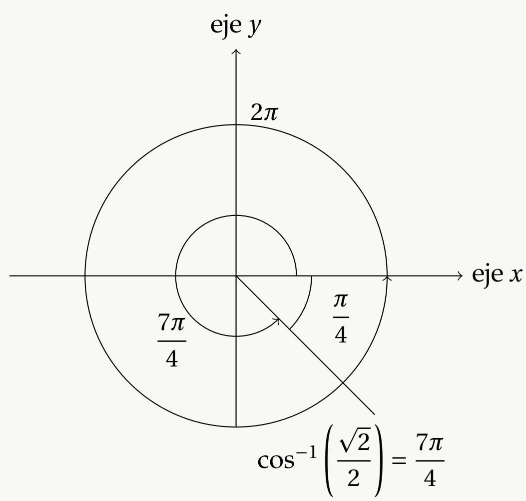
$$2x = \frac{\pi}{4}$$
$$x = \frac{\pi}{4 * 2}$$
$$x = \frac{\pi}{8}$$




Para encontrar el valor de $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$ en el cuarto cuadrante se toma el valor de $2\pi$ y se le resta el valor de $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$ obetenido en el primer cuadrante, es decir, $2\pi - \frac{\pi}{4}$. La otra solución se encuentra cuando $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2) = 2\pi - \frac{\pi}{4}$, para obtenerla se resuelve la ecuación $2x = 2\pi - \frac{\pi}{4}$.

**Cuarto cuadrante**

$$2x = 2\pi - \frac{\pi}{4}$$
$$2x = \frac{8\pi - \pi}{4}$$
$$2x = \frac{7\pi}{4}$$
$$x = \frac{7\pi}{8}$$



Las soluciones entre $0$ y $2\pi$ son: $\frac{\pi}{8}$ y $\frac{7\pi}{8}$

**Ejemplo 5.4**

Encuentre el valor de x que satisface la ecuación trigonométrica

$$\tan(5x) = -\sqrt{3}$$

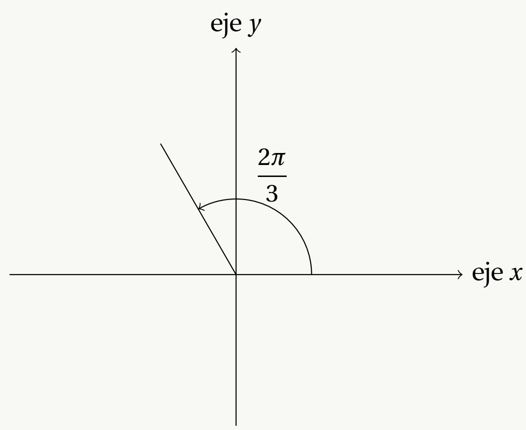
**Solución:** En este caso la función ya está despejada. Ahora se aplica la función inversa a ambos lados de la ecuación.

$$5x = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

Como se está evaluando la función $\tan^{-1}$ en un número negativo, $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ tiene dos soluciones entre $0$ y $2\pi$; se encuentran en el segundo y cuarto cuadrantes. Al evaluar $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ en la calculadora en modo radianes, se obtiene $-\frac{\pi}{3}$, como se está trabajando con ángulos entre $0$ y $2\pi$, se hace $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, el cual es un ángulo ubicado en el segundo cuadrante que cumple $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$ y permite calcular la primera solución.

**Primer cuadrante**

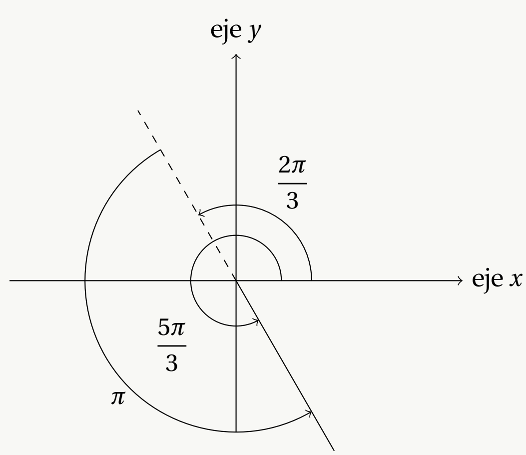
$$\begin{aligned} 5x &= \frac{2\pi}{3} \\ x &= \frac{2\pi}{5 * 3} \\ x &= \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$




Para encontrar el valor de $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ en el cuarto cuadrante se toma el valor de $\pi$ y se le suma el valor de $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ obetenido en el segundo cuadrante. La otra solución se encuentra cuando $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \pi + \frac{2\pi}{3}$, para obtenerla se resuelve la ecuación $5x = \pi + \frac{2\pi}{3}$.

**Cuarto cuadrante**

$$\begin{aligned} 5x &= \pi + \frac{2\pi}{3} \\ 5x &= \frac{5\pi}{3} \\ x &= \frac{5\pi}{5 * 3} \\ x &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$



Las soluciones son: $\dfrac{2\pi}{15}$ y $\dfrac{\pi}{3}$

**Ejemplo 5.5**

Encuentre el valor de x que satisface la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}(-3x) = -\frac{1}{2}$$

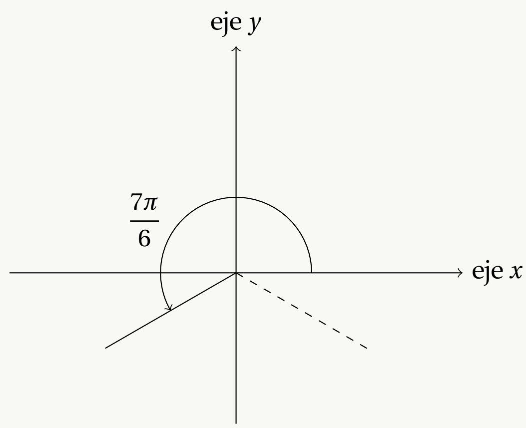
**Solución:** En este caso la función ya está despejada. Ahora se aplica la función inversa a ambos lados de la ecuación.

$$-3x = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Como se está evaluando la función $\operatorname{sen}^{-1}$ en un número negativo, $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ tiene dos soluciones entre $0$ y $2\pi$; se encuentran en el tercer y cuarto cuadrantes. Al evaluar $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ en la calculadora en modo radianes, se obtiene $-\frac{\pi}{6}$, como se está trabajando con ángulos entre $0$ y $2\pi$, se hace $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, el cual es un ángulo ubicado en el tercer cuadrante que cumple $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi}{6}$ y permite calcular la primera solución.

**<u>Primer cuadrante</u>**

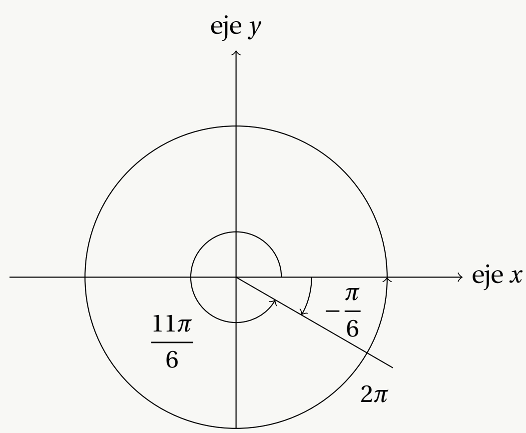
$$-3x = \frac{7\pi}{6}$$
$$x = -\frac{7\pi}{6*3}$$
$$x = -\frac{7\pi}{18}$$




Para encontrar el valor de $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ en el cuarto cuadrante se toma el valor de $2\pi$ y se le suma el valor de $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ obetenido cuando se evaluó en la calculadora, es decir, $2\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$. La otra solución se encuentra cuando $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$, para obtenerla se resuelve la ecuación $-3x = 2\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

**<u>Cuarto cuadrante</u>**

$$-3x = 2\pi - \left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$-3x = \frac{11\pi}{6}$$
$$x = -\frac{11\pi}{6*3}$$
$$x = -\frac{11\pi}{18}$$



Las soluciones son: $-\dfrac{7\pi}{18}$ y $-\dfrac{11\pi}{18}$

**Ejemplo 5.6**

Encuentre el valor de x que satisface la ecuación trigonométrica

$$-1+\cos(x) = -\frac{3}{2}$$

**Solución:** Primero se despeja la función trigonométrica.

$$\cos(x) = 1-\frac{3}{2}$$
$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$

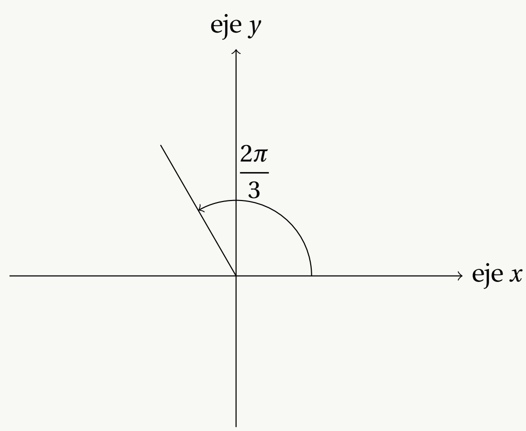
Ahora se aplica la función inversa a ambos lados de la ecuación.

$$x = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Como se está evaluando la función $\cos^{-1}$ en un número negativo, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ tiene dos soluciones entre 0 y $2\pi$; se encuentran en el segundo y tercer cuadrantes. Al evaluar $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ en la calculadora en modo radianes, se obtiene $\frac{2\pi}{3}$, valor que permite calcular la primera solución.

**Primer cuadrante**

$$x = \frac{2\pi}{3}$$



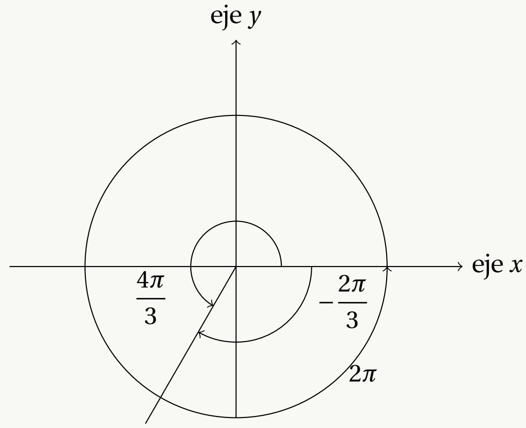

Para encontrar el valor de $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ en el tercer cuadrante se toma el valor de $2\pi$ y se le resta el valor de $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ obetenido en el segundo cuadrante, es decir, $2\pi-\frac{2\pi}{3}$. La otra solución se encuentra cuando $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi-\frac{2\pi}{3}$, para obtenerla se resuelve la ecuación $x = 2\pi-\frac{2\pi}{3}$.

**Cuarto cuadrante**

$x = 2\pi - \frac{2\pi}{3}$

$x = \dfrac{6\pi - 2\pi}{3}$

$x = \dfrac{4\pi}{3}$




Las soluciones son: $\dfrac{2\pi}{3}$ y $\dfrac{4\pi}{3}$

## 5.2 Ecuaciones de la forma msenx=ncosx

Otro tipo de ecuaciones trigonométricas son aquellas que tienen la forma msenx = ncosx, donde m y n son números conocidos. Para resolver ecuaciones de este tipo, es suficiente con hacer:

$$\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{n}{m}$$

Esta última expresión es equivalente a:

$$\tan(\theta) = \frac{n}{m}$$

la cual se resuelve aplicando el método de despeje directo.

**Procedimiento 5.2**
1.) Se despeja la ecuación para alguna de las dos funciones trigonométricas.
2.) Se pasa a dividir la fución coseno y el número que acompañe a la función seno.
3.) Se reescribe la ecuación en terminos de la función tangente.
4.) Se utiliza el método de despeje directo para resolver la ecuación.

**Ejemplo 5.7**

Encuentre el valor de $\alpha$ que satisface la ecuación trigonométrica

$$5\text{sen}(\alpha) = 3\cos(\alpha)$$

**Solución:** Primero se pasan a dividir $\cos\alpha$ y 5.

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{3}{5}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{3}{5}$$

Ahora se aplica la función inversa a ambos lados de la ecuación.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

Como se está evaluando la función $\tan^{-1}$ en un número positivo, $\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ tiene dos soluciones entre 0° y 360°; se encuentran en el primer y tercer cuadrantes. Al evaluar $\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ en la calculadora en modo deg, se obtiene 30,96°, que es la primera solución. Para encontrar la segunda solución se suma 180° con 30,96°, es decir, $180° + 30{,}96°$.

| Primer cuadrante | Tercer cuadrante |
|---|---|
| $\alpha = 30{,}96°$ | $\alpha = 180° + 30{,}96°$ |
| | $\alpha = 210{,}96°$ |

Las soluciones son: 30,96° y 210,96°

**Ejemplo 5.8**

Encuentre el valor de x que satisface la ecuación trigonométrica

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x) = 0$$

**Solución:** Primero se pasa para el lado derecho de la igualdad el termino $\cos(2x)$.

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}(2x) = -\cos(2x)$$

Ahora se pasan a dividir $\cos(2x)$ y $\sqrt{3}$.

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\tan(2x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Se continua aplicando la función inversa a ambos lados de la ecuación.

$$2x = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Como se está evaluando la función $\tan^{-1}$ en un número negativo, $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ tiene dos soluciones entre 0° y 360°; se encuentran en el segundo y cuarto cuadrantes. Al evaluar $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ en la calculadora en modo deg, se obtiene $-30°$, como se está trabajando con ángulos entre 0° y 360°, se hace $180° - 30° = 150°$, el cual es una ángulo ubicado en el segundo cuadrante que cumple: $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 150°$, valor que permite encotrar la primera solución. Para encontrar el valor de $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ en el cuarto cuadrante se toma el valor de 180° y se le suma el valor de $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ obtenido en el segundo cuadrante. La otra solución se encuentra cuando $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 180° + 150°$

| Primer cuadrante | Segundo cuadrante |
|---|---|
| $2x = 150°$ | $2x = 180° + 150°$ |
| $x = \dfrac{150°}{2}$ | $2x = 330°$ |
| $x = 70°$ | $x = \dfrac{330°}{2}$ |
| | $x = 165°$ |

Las soluciones son: 70° y 165°

## 5.3 Fórmula general para las ecuaciones de segundo grado para resolver ecuaciones trigonométricas

Algunas ecuaciones trigonométricas pueden resolverse fácilmente cuando es posible pasar todas las funciones trigonométricas que aparezcan a terminos de una sola función trigonométrica. En caso de que resulte una ecuación de segundo grado, se utiliza la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado, teniendo en cuenta que la incógnita es una función trigonométrica.

**Procedimiento 5.3**
1.) Se utiliza una de las identidades pitagoricas para dejar la ecuación en terminos de una sola función trigonométrica.
2.) Se hace el cambio de variable u igual a la función trigonométrica que aparezca en la ecuación (Esto con el fin de facilitar el ánalisis).
3.) Si la ecuación adquiere la forma $\mathrm{au}^2 + \mathrm{bu} + \mathrm{c} = 0$ se aplica la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado.
4.) Se cambia u por la función trigonométrica en la que estaba escrita la función antes del cambio de variable.
5.) Se resuelven las ecuaciones obtenidas aplicando el método de deseje directo.

**Ejemplo 5.9**

Encuentre el valor de $\theta$ que satisface la ecuación trigonométrica

$$8\mathrm{sen}^2(\theta) + 2\mathrm{sen}(\theta) - 1 = 0$$

**Solución:** Primero se hace el cambio de variable $\mathrm{u} = \mathrm{sen}(\theta)$ y se substituye en la ecuación original:

$$8\mathrm{u}^2 + 2\mathrm{u} - 1 = 0$$

Claramente la ecuación anterior es cuadrática (tiene la forma $\mathrm{au}^2 + \mathrm{bu} + \mathrm{c} = 0$) y por tanto se puede aplicar la fórmula general para resolverla. Para este ejercicio en partícular se tiene que:

| Coeficiente | Valor |
|---|---|
| a | 8 |
| b | 2 |
| c | −1 |

Luego de reemplazar estos valores en la fórmula general se obtiene:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4*8*(-1)}}{2*8} \\ u &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{16} \\ u &= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{16} \\ u &= \frac{-2 \pm 6}{16} \end{aligned}$$

$$u = \frac{-2+6}{16} \quad \text{y} \quad u = \frac{-2-6}{16}$$

$$u = \frac{4}{16} \quad \text{y} \quad u = \frac{-8}{16}$$

$$u = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad u = \frac{-1}{2}$$

Ahora se substituye u por sen($\theta$)

$$\text{sen}(\theta) = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad \text{sen}(\theta) = \frac{-1}{2}$$

Cada una de estas ecuaciones trigonométricas se puede resolver por despeje directo, lo cual se deja como ejercicio.

**Ejemplo 5.10**

Encuentre el valor de $\theta$ que satisface la ecuación trigonométrica

$$3\text{sen}^2(\theta) + 10\cos(\theta) - 10 = 0$$

**Solución:** Esta ecuación se puede trasnformar en una ecuación cuadrática usando la identidad pitagorica $\text{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta) = 1$ y despejando $\text{sen}^2(\theta)$ para obtener $\text{sen}^2(\theta) = 1-\cos^2(\theta)$. Si se reemplaza $\text{sen}^2(\theta)$ por $1-\cos^2(\theta)$ en la ecuación inicial resulta:

$$\begin{aligned} 3(1-\cos^2(\theta)) + 10\cos(\theta) - 10 &= 0 \\ 3 - 3\cos^2(\theta) + 10\cos(\theta) - 10 &= 0 \\ -3\cos^2(\theta) + 10\cos(\theta) - 7 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora se hace el cambio de variable $u = \cos(\theta)$ y se substituye en la ecuación original:

$$-3u^2 + 10u - 7 = 0$$

Claramente la ecuación anterior es cuadrática (tiene la forma $au^2 + bu + c = 0$) y por tanto se puede aplicar la fórmula general para resolverla. Para este ejercicio en partícular se tiene que:

| Coeficiente | Valor |
|---|---|
| a | −3 |
| b | 10 |
| c | −7 |

Luego de reemplazar estos valores en la fórmula general se obtiene:

$$u = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 * (-3) * (-7)}}{2 * (-3)}$$
$$u = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 84}}{-6}$$
$$u = \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{-6}$$
$$u = \frac{-10 \pm 4}{-6}$$
$$u = \frac{-10 + 4}{-6} \quad \text{y} \quad u = \frac{-10 - 4}{-6}$$
$$u = \frac{-6}{-6} \quad \text{y} \quad u = \frac{-14}{-6}$$
$$u = 1 \quad \text{y} \quad u = 2{,}33$$

Ahora se substituye u por $\cos(\theta)$

$$\cos(\theta) = 1 \qquad \text{y} \qquad \cos(\theta) = 2{,}33$$

La ecuación $\cos(\theta) = 1$ tiene solamente una solución entre 0 y $2\pi$ (en general $\cos(\theta) = \pm 1$ y $\text{sen}(\theta) = \pm 1$ sólo tienen una solución entre 0 y $2\pi$). Por otro lado la ecuación $\cos(\theta) = 2{,}33$ no tiene solución dado que tanto $\cos(\theta)$ como $\text{sen}(\theta)$ sólo toman valores entre −1 y 1 para cualquier ángulo $\theta$.

La ecuación $\cos(\theta) = 1$ se puede resolver por despeje directo:

$$\cos(\theta) = 1$$
$$\theta = \cos^{-1}(1)$$
$$\theta = 0$$

La solución de la ecuación $3\text{sen}^2(\theta) + 10\cos(\theta) - 10 = 0$ es $\theta = 0$

Existe otro tipo de ecuación trigonométrica que se puede transformar en una ecuación cuadrática, aquellas que tienen la forma $\text{msenx}+\text{ncosx}=k$ con m, n y k números reales conocidos.

**Procedimiento 5.4**
1.) Se despeja una de las funciones trigonométricas (puede ser cualquiera).
2.) Se eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación.
3.) Se usa una identidad pitagorica para dejar la ecuación en terminos de una sola función trigonométrica.
4.) Se hace el cambio de variable u igual a la función trigonométrica que aparezca en la ecuación (Esto con el fin de facilitar el ánalisis).
5.) Se aplica la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado.
6.) Se cambia u por la función trigonométrica en la que estaba escrita la función antes del cambio de variable.
7.) Se resuelven las ecuaciones obtenidas aplicando el método de deseje directo.
8.) PRECAUCIÓN: Cuando una ecuación se eleva al cuadrado se agrega una solución que no pertence a la original; cuando se eleva al cubo se agregan dos soluciones, y así sucesivamente. En estos casos se deben reemplazar todas las aparentes soluciones obtenidas para descartar las que no lo son.

Ejemplo 5.11

Encuentre el valor de $\theta$ que satisface la ecuación trigonométrica

$$11\text{sen}(\theta)-3\cos(\theta)=2$$

**Solución:** Primero se despeja una de las funciones trigonometricas

$$11\text{sen}(\theta)=2+3\cos(\theta)$$

Ahora se eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación

$$(11\text{sen}(\theta))^2=(2+3\cos(\theta))^2$$
$$121\text{sen}^2(\theta)=4+12\cos(\theta)+9\cos^2(\theta)$$

Usando la identidad $\text{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$ y despejando se llega a $\text{sen}^2(\theta)=1-\cos^2(\theta)$, expresión que se substituye en la ecuación anterior

$$121(1-\cos^2(\theta))=4+12\cos(\theta)+9\cos^2(\theta)$$
$$121-121\cos^2(\theta)=4+12\cos(\theta)+9\cos^2(\theta)$$
$$0=4+12\cos(\theta)+9\cos^2(\theta)-121+121\cos^2(\theta)$$
$$0=130\cos^2(\theta)+12\cos(\theta)-117$$
$$130\cos^2(\theta)+12\cos(\theta)-117=0$$

Ahora se hace el cambio de variable $u=\cos(\theta)$ y se substituye en la ecuación original:

$$130u^2+12u-117=0$$

Claramente la ecuación anterior es cuadrática (tiene la forma $au^2+bu+c=0$) y por tanto se puede aplicar la fórmula general para resolverla. Para este ejercicio en partícular se tiene que:

| Coeficiente | Valor |
|---|---|
| a | 130 |
| b | 12 |
| c | −117 |

Luego de reemplazar estos valores en la fórmula general se obtiene:

$$u = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4*130*(-117)}}{2*130}$$
$$u = \frac{-12 \pm \sqrt{144+60840}}{260}$$
$$u = \frac{-12 \pm \sqrt{60984}}{260}$$
$$u = \frac{-12 \pm 246{,}9493875}{260}$$
$$u = \frac{-12 + 246{,}9493875}{260} \quad \text{y} \quad u = \frac{-12 - 246{,}9493875}{260}$$
$$u = \frac{234{,}9493875}{260} \quad \text{y} \quad u = \frac{-258{,}9493875}{260}$$
$$u = 0{,}9036514904 \quad \text{y} \quad u = -0{,}9959591827$$

Ahora se substituye u por $\cos(\theta)$

$$\cos(\theta) = 0{,}9036514904 \quad \text{y} \quad \cos(\theta) = -0{,}9959591827$$

Cada una de estas ecuaciones trigonométricas se puede resolver por despeje directo.

**Soluciones para cos**$(\theta) = 0{,}9036514904$
Se tiene que:

$$\theta = \cos^{-1}(0{,}9036514904)$$

Como se está evaluando la función $\cos^{-1}$ en un número positivo, $\cos^{-1}(0{,}9036514904)$ tiene dos soluciones entre 0 y 360°, las cuales se encuentran en el primer y cuarto cuadrantes. Al evaluar $\cos^{-1}(0{,}9036514904)$ en la calculadora en modo deg, se obtiene 25,35773051°. Ángulo ubicado en el primer cuadrante.
Para encontrar la solución ubicada en el cuarto cuadrante se hace $360° - 25{,}35773051° = 334{,}6422695°$
Las soluciones para $\cos(\theta) = 0{,}9036514904$ son 25,35773051° y 334,6422695°

**Soluciones para cos**$(\theta) = -0{,}9959591827$
Se tiene que:

$$\theta = \cos^{-1}(-0{,}9959591827)$$

Como se está evaluando la función $\cos^{-1}$ en un número negativo, $\cos^{-1}(-0{,}9959591827)$ tiene dos soluciones entre 0 y 360°, las cuales se encuentran en el segundo y tercer cuadrantes. Al evaluar $\cos^{-1}(-0{,}9959591827)$ en la calculadora en modo deg, se obtiene 174,847493°; ángulo ubicado en el segundo cuadrante.
Para encontrar la solución ubicada en el cuarto cuadrante se hace $360° - 174{,}847493° = 185{,}152507°$
Las soluciones para $\cos(\theta) = -0{,}9959591827$ son 174,847493° y 185,152507°

Para terminar se debe revisar entre 25,35773051°, 334,6422695°, 174,847493° y 185,152507° cuales son soluciones de la ecuación $11\text{sen}(\theta) - 3\cos(\theta) = 2$

| Valor | Verificación | Es solución |
|---|---|---|
| 25,35773051° | $11\text{sen}(25{,}35773051°) - 3\cos(25{,}35773051°) = 2$ | si |
| 334,6422695° | $11\text{sen}(334{,}6422695°) - 3\cos(334{,}6422695°) = -7{,}422$ | no |
| 174,847493° | $11\text{sen}(174{,}847493°) - 3\cos(174{,}847493°) = 3{,}976$ | no |
| 185,152507° | $11\text{sen}(185{,}152507°) - 3\cos(185{,}152507°) = 2$ | si |

Las soluciones de la ecuación $11\text{sen}(\theta) - 3\cos(\theta) = 2$ son 25,35773051° y 185,152507°

## 5.4 Usando factorización

En los casos en los que la ecuación trigonométrica se deje factorizar, quedando igualada a cero, se puede igualar cada factor a cero y resolver las ecuaciones resultantes usando alguna de las técnicas ya expuestas.

**Procedimiento 5.5**
1.) Factorizar la ecuación.
2.) Igualar cada factor a cero.
3.) Resolver cada una de las ecuaciones resultantes usando uno de los métodos ya conocidos.

**Ejemplo 5.12**

Resolver la ecuación trigonométrica

$$8\text{sen}(\theta)\cos(2\theta) - 5\text{sen}(\theta) = 0$$

**Solución:** El primer paso es factorizar la ecuación trigonométrica

$$\begin{aligned} 8\text{sen}(\theta)\cos(2\theta) - 5\text{sen}(\theta) &= 0 \\ \text{sen}(\theta)(8\cos(2\theta) - 5) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora se iguala cada factor a cero

$$\text{sen}(\theta) = 0 \quad \text{ó} \quad 8\cos(2\theta) - 5 = 0$$

Finalmente cada una de las ecuaciones resultantes se resuelve usando uno de los métodos ya conocidos, en este caso, se usa el método de despeje directo, lo cual se deja como ejercicio.

**Ejemplo 5.13**

Resolver la ecuación trigonométrica

$$3\text{sen}(x)\tan(x) + 3\text{sen}(x) - \tan(x) - 1 = 0$$

**Solución:** El primer paso es factorizar la ecuación trigonométrica

$$\begin{aligned} 3\text{sen}(x)\tan(x) + 3\text{sen}(x) - \tan(x) - 1 &= 0 \\ 3\text{sen}(x)(\tan(x) + 1) - 1(\tan(x) + 1) &= 0 \\ (3\text{sen}(x) - 1)(\tan(x) + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora se iguala cada factor a cero

$$3\text{sen}(x) - 1 = 0 \quad \text{ó} \quad \tan(x) + 1 = 0$$

Finalmente cada una de las ecuaciones resultantes se puede resolver usando uno de los métodos ya conocidos, en este caso,se usa el método de despeje directo, lo cual se deja como ejercicio.

**Ejemplo 5.14**

Resolver la ecuación trigonométrica

$$6\text{sen}^2(x) + 7\text{sen}(x)\cos(x) - 3\cos^2(x) = 0$$

**Solución:** El primer paso es factorizar la ecuación trigonométrica

$$6\text{sen}^2(x) + 7\text{sen}(x)\cos(x) - 3\cos^2(x) = 0$$
$$(2\text{sen}(x) + 3\cos(x))(3\text{sen}(x) - \cos(x)) = 0$$

Después se iguala cada factor a cero

$$2\text{sen}(x) + 3\cos(x) = 0 \quad \text{ó} \quad 3\text{sen}(x) - \cos(x) = 0$$

Finalmente cada una de las ecuaciones resultantes se puede resolver usando uno de los métodos ya conocidos, en este caso, se usa el método expuesto para las ecuaciones del tipo msenx=ncosx. Esto se deja como ejercicio.

En ocasiones es necesario aplicar alguna identidad trigonométrica sobre algún termino de la ecuación con el fin de obtener una expresión equivalente que se pueda factorizar, en la mayoría de las ocasiones las identidades que se deben tener presentes son las de águlo doble y ángulo medio.

**Ejemplo 5.15**

Resolver la ecuación trigonométrica

$$\text{sen}(2x) + \cos(x) = 0$$

**Solución:** En esta ocasión no hay forma de factorizar la ecuación, pero si se puede aplicar la identidad de ángulo doble $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$ para obtener

$$2\text{sen}(x)\cos(x) + \cos(x) = 0$$

Ahora se factoriza la ecuación resultante

$$2\text{sen}(x)\cos(x) + \cos(x) = 0$$
$$\cos(x)(2\text{sen}(x) + 1) = 0$$

Para continuar cada factor se iguala a cero

$$\cos(x) = 0 \quad \text{ó} \quad 2\text{sen}(x) + 1 = 0$$

Finalmente cada una de las ecuaciones resultantes se resuelven por uno de los métodos ya analizados, en este caso, se usa el método de despeje directo, que se deja como ejercicio.

Ejemplo 5.16

Resolver la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}(4x) - \operatorname{sen}(2x) = 0$$

**Solución:** Aquí no es posible factorizar la ecuación, pero si se puede aplicar la identidad de ángulo doble $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ que para el termino $\operatorname{sen}(4x)$ toma la forma $\operatorname{sen}(4x) = \operatorname{sen}(2(2x)) = 2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)$ para obtener

$$2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x) = 0$$

Ahora se factoriza

$$(\operatorname{sen}(2x))(2\cos(2x) - 1) = 0$$

Se continua igualando cada factor a cero

$$\operatorname{sen}(2x) = 0 \quad \text{ó} \quad 2\cos(2x) - 1 = 0$$

Finalmente cada una de estas ecuaciones se resuelve por uno de los métodos ya mencionados, en este caso, se usa el método de despeje directo.

Ejemplo 5.17

Resolver la ecuación trigonométrica

$$\cos(2x) - \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}^2(x)$$

**Solución:** Para comenzar se puede aplicar la identidad trigonométrica de ángulo doble
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$ para obtener

$$\begin{aligned}
\cos(2x) - \operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}^2(x)\\
\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}^2(x)\\
\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^2(x) &= 0\\
\cos^2(x) - 2\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) &= 0
\end{aligned}$$

Esta ecuación se puede resolver usando la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado, para ello se de aplicar la identidad pitagorica $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x) = 1$ que al despejar $\cos^2(x)$ toma la forma $\cos^2(x) = 1-\operatorname{sen}^2(x)$

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) - 2\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) &= 0\\
1 - \operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) &= 0\\
1 - 3\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) &= 0\\
-3\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) + 1 &= 0
\end{aligned}$$

Esta última ecuación se puede resolver usando la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado, lo cual se deja como ejercicio.

# 6 Resolución de triángulos

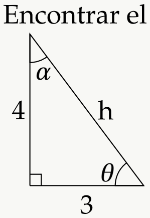
## 6.1 Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo significa encontrar el valor de cada uno de sus lados y ángulos, las razones trigonométricas son de gran utilidad para lograr tal cometido. Cuando se va a resolver un triángulo rectángulo se puden presentar los siguientes casos:

**Caso I:** Dados dos catetos, hallar la hipotenusa y los dos ángulos agudos.
**Caso II:** Dados la hipotenusa y un cateto, hallar el otro cateto y los ángulos agudos.
**Caso III:** Dados un cateto y un ángulo agudo, hallar la hipotenusa , el otro cateto y el otro ángulo.
**Caso IV:** Dados la hipotenusa y un ángulo, hallar los catetos y el otro ángulo.

**Ejemplo 6.1** **Caso I**

Encontrar el valor de h, $\alpha$ y $\theta$ en el siguiente triángulo:




**Solución:** El primer paso es decidir cual de los ángulos se va a hallar (puede ser $\alpha$ o $\theta$). En este caso se va a encontar el valor de $\alpha$.
El segundo paso es identificar el cateto opuesto y el cateto adyacente para $\alpha$.

| | |
|---|---|
| Cateto adyacente | 4 |
| Cateto opuesto | 3 |

El tercer paso es reemplazar los valores de los catetos en la razón correspondiende a $\tan(\alpha)$.

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{4}$$

El cuarto paso es despejar $\alpha$ para lo cual se aplica la función tangente inversa a ambos lados de la ecuación y se obtiene:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$\alpha \approx 36{,}87^\circ$$

**En la calculadora:**
Para hacer esta operación en la calculadora se presionan las teclas **shift**, **tan**, **(**, **3**, ÷, **4**, **)**

El quinto paso es encontrar el valor del otro ángulo usando el hecho de que en todo triángulo la suma de los ángulos internos es igual a 180°.

$$90^\circ + 36{,}87^\circ + \theta = 180^\circ$$
$$\theta \approx 53{,}13^\circ$$

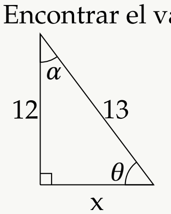
El sexto paso es encontrar el valor de la hipotenusa, para ello se puede usar el teorema de Pitagoras, así

$$h^2 = 4^2 + 3^2$$
$$h = \sqrt{25}$$
$$h = 5$$

Los valores pedidos son: $h = 5$, $\alpha \approx 36{,}87^\circ$ y $\theta \approx 53{,}13^\circ$

**Ejemplo 6.2** **Caso II**

Encontrar el valor de x, $\alpha$ y $\theta$ en el triángulo:




**Solución:** El primer paso es encontrar el valor del ángulo que es opuesto al cateto conocido, en este caso es $\theta$.

El segundo paso es identificar el valor del cateto opuesto y la hipotenusa para $\theta$.

| | |
|---|---|
| Hipotenusa | 13 |
| Cateto opuesto | 12 |

El tercer paso es buscar una razón trigonométrica que relacione al cateto opuesto con la hipotenusa, por ejemplo sen($\theta$).

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{12}{13}$$

El cuarto paso es despejar $\theta$ para lo cual se aplica seno inverso a ambos lados de la ecuación y se obtiene:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$$
$$\theta \approx 67{,}38^\circ$$

**En la calculadora**
Para realizar esta operación en la calculadora se presionan las teclas **shift**, **sen**, **(**, **12**, ÷, **13**, **)**

El quinto paso es encontrar el valor del otro ángulo usando el hecho de que en un triángulo la suma de los ángulos internos es igual a 180°.

$$90° + 67{,}38° + \alpha = 180°$$
$$\alpha \approx 22{,}62°$$

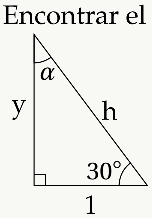
El sexto paso es encontrar el valor del cateto adyacente, para ello se puede usar el teorema de Pitagoras.

$$13^2 = 12^2 + x^2$$
$$x^2 = 13^2 - 12^2$$
$$x^2 = 169 - 144$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \sqrt{25}$$
$$x = 5$$

Los valores pedidos son: $x = 5$, $\theta \approx 67{,}38°$ y $\alpha \approx 22{,}62°$

**Ejemplo 6.3** **Caso III**

Encontrar el valor de y, h y $\alpha$ en el triángulo:




**Solución:** El primer paso es encontrar el valor de $\alpha$, como la suma de los ángulos en un triángulo es igual a 180° se sique que:

$$90° + 30° + \alpha = 180°$$
$$\alpha = 180° - 120°$$
$$\alpha = 60°$$

El segundo paso es identificar el valor del cateto opuesto y el cateto adyacente para 30°.

| | |
|---|---|
| Cateto opuesto | $y$ |
| Cateto adyacente | 1 |

El tercer paso es buscar una razón trigonométrica que relacione al cateto opuesto con el cateto adyacente, por ejemplo tan(30°).

$$\tan(30°) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y}{1} = y$$

El cuarto paso es evaluar tan(30°)

$$y = \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

**En la calculadora**
Para realizar esta operación en la calculadora se presionan las teclas **tan**, **(**, **30**, **)**

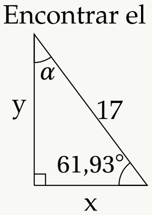
El quinto paso es encontrar el valor de la hipotenusa, para ello se usa el teorema de Pitagoras

$$\begin{aligned} h^2 &= 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ h^2 &= 1 + \frac{1}{3} \\ h^2 &= \frac{4}{3} \\ h &= \sqrt{\frac{4}{3}} \\ h &= \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Los valores pedidos son: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $h = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y $\alpha = 60°$

Ejemplo 6.4 **Caso IV**

Encontrar el valor de y, x y $\alpha$ en el triángulo:




**Solución:** El primer paso es encontrar el valor de $\alpha$, como la suma de los ángulos internos en un triángulo es igual a 180° se sique que:

$$\begin{aligned} 90° + 61{,}93° + \alpha &= 180° \\ \alpha &= 180° - 151{,}93° \\ \alpha &= 28{,}07° \end{aligned}$$

El segundo paso es identificar el valor del cateto opuesto y la hipotenusa para 61,93°.

| | |
|---|---|
| Cateto opuesto | $y$ |
| Hipotenusa | 17 |

El tercer paso es buscar una razón trigonométrica que relacione al cateto opuesto con la hipotenusa, por ejemplo sen(61,93°).

$$\text{sen}(61{,}93°) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{17}$$

El cuarto paso es encontrar el valor de y

$$y = 17 \times \text{sen}(61{,}93^\circ) = 17 \times 0{,}882373 = 15$$
$$y = 15$$

**En la calculadora**
Para realizar esta operación en la calculadora se presionan las teclas **sen**, **(**, **61.93**, **)**

El quinto paso es encontrar el valor del cateto adyacente, para ello se usa el teorema de Pitagoras

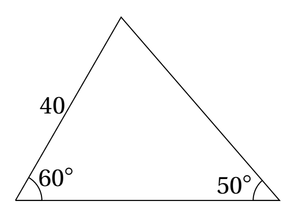
$$17^2 = 15^2 + x^2$$
$$289 = 225 + x^2$$
$$289 - 225 = x^2$$
$$x^2 = 64$$
$$x = \sqrt{64}$$
$$x = 8$$

Los valores pedidos son: $y = 15$, $x = 8$ y $\alpha = 61{,}93^\circ$

## 6.2 Leyes del seno y del coseno

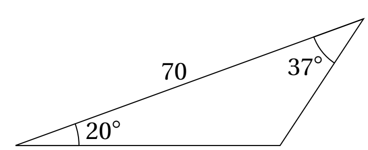
Cuando se debe resolver un triángulo que no es rectángulo, es decir, un triángulo oblicuo, es necesario usar la ley del seno, la ley del coseno o ambas. Cualquier triángulo oblicuo, puede ser resuelto **si al menos uno de sus lados y cualquier otro par de medidas de él son conocidas**. Los casos posibles son los siguientes:

1. **Ángulo-Ángulo-Lado (AAL)**
   Cuando se conocen dos ángulos del triángulo y un lado opuesto a uno de ellos.

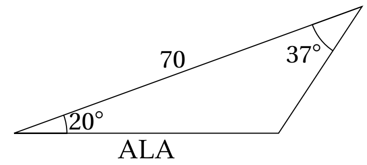


AAL

2. **Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)**
   Cuando se conocen dos ángulos del triángulo y el lado adyacente a ellos.



ALA



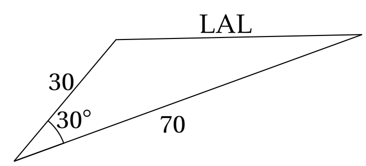

3. **Lado-Lado-Ángulo (LLA)**
   Cuando se conocen dos lados del triángulo
   y una ángulo opuesto a uno de ellos.

   **Observación:** Este caso es conocido como
   el caso ambiguo, dado que se tienen las siguientes
   posibilidades:

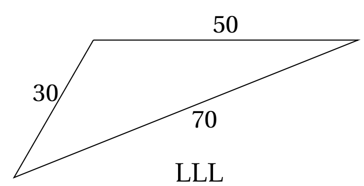
   a. Una solución (Un triángulo).

   b. Dos soluciones (Dos triángulo).

   c. Ninguna solución.




4. **Lado-Ángulo-Lado (LAL)**
   Cuando se conocen dos lados del triángulo
   y el ángulo entre ellos.




5. **Lado-Lado-Lado (LLL)**
   Cuando se conocen los tres lados del triángulo.

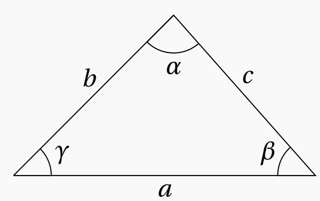
### 6.2.1 Ley del seno

**Teorema 6.1 Ley del seno**

En un triángulo $\triangle ABC$,

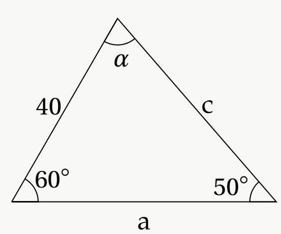
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Es decir, los lados son proporcionales al seno del ángulo opuesto.




**Ejemplo 6.5** **Caso AAL**

Resolver el siguiente triángulo




**Solución:** En este caso, para resolver el triángulo se usa la ley del seno. Lo primero que se hace es revisar cuáles son los datos conocidos y cuáles los desconocidos.

| Variable | Valor |
|---|---|
| a | Desconocido |
| b | 40 |
| c | Desconocido |
| $\alpha$ | Desconocido |
| $\beta$ | 50° |
| $\gamma$ | 60° |

Para encontrar el valor de $\alpha$ se usa el hecho de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, así

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 180^\circ \\ \alpha+50^\circ+60^\circ &= 180^\circ \\ \alpha+110^\circ &= 180^\circ \\ \alpha &= 180^\circ-110^\circ \\ \alpha &= 70^\circ \end{aligned}$$

Ahora se aplica la ley del seno para encontrar el valor de c.

$$\begin{aligned} \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} &= \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \\ \frac{40}{\operatorname{sen}(50^\circ)} &= \frac{c}{\operatorname{sen}(60^\circ)} \\ \frac{40\cdot\operatorname{sen}(60^\circ)}{\operatorname{sen}(50^\circ)} &= c \\ 45{,}22 &\approx c \\ c &\approx 45{,}22 \end{aligned}$$

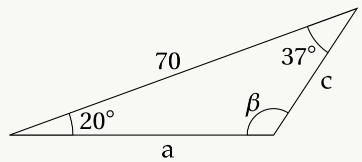
Para encontrar el valor de a se aplica una vez más la ley del seno.

$$\begin{aligned} \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} &= \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \\ \frac{40}{\operatorname{sen}(50^\circ)} &= \frac{c}{\operatorname{sen}(70^\circ)} \\ \frac{40\cdot\operatorname{sen}(70^\circ)}{\operatorname{sen}(50^\circ)} &= a \\ 49{,}07 &\approx a \\ a &\approx 49{,}07 \end{aligned}$$

Se concluye que $a \approx 49{,}07$; $c \approx 45{,}22$; $\alpha = 70^\circ$

**Ejemplo 6.6** **Caso ALA**

Resolver el siguiente triángulo




**Solución:** En este caso, para resolver el triángulo se usa la ley del seno. Lo primero que se hace es revisar cuáles son los datos conocidos y cuáles los desconocidos.

| Variable | Valor |
|---|---|
| a | Desconocido |
| b | 70 |
| c | Desconocido |
| $\alpha$ | 37° |
| $\beta$ | Desconocido |
| $\gamma$ | 20° |

Para encontrar el valor de $\beta$ se usa el hecho de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, así

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma &= 180^\circ \\
37^\circ+\beta+20^\circ &= 180^\circ \\
\beta+57^\circ &= 180^\circ \\
\beta &= 180^\circ-57^\circ \\
\beta &= 123^\circ
\end{aligned}$$

Ahora se aplica la ley del seno para encontrar el valor de c.

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} &= \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \\
\frac{70}{\operatorname{sen}(123^\circ)} &= \frac{c}{\operatorname{sen}(20^\circ)} \\
\frac{70\cdot\operatorname{sen}(20^\circ)}{\operatorname{sen}(123^\circ)} &= c \\
28{,}55 &\approx c \\
c &\approx 28{,}55
\end{aligned}$$

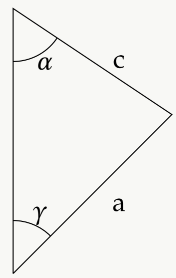
Para encontrar el valor de a se aplica una vez más la ley del seno.

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} &= \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \\
\frac{70}{\operatorname{sen}(123^\circ)} &= \frac{a}{\operatorname{sen}(37^\circ)} \\
\frac{70\cdot\operatorname{sen}(37^\circ)}{\operatorname{sen}(123^\circ)} &= a \\
50{,}23 &\approx a \\
a &\approx 50{,}23
\end{aligned}$$

Se concluye que $a\approx 50{,}23$; $c\approx 28{,}55$; $\beta=123^\circ$

**Ejemplo 6.7** **Caso LLA - Con una solución**

Encuentre el valor del ángulo $\gamma$ para que pueda existir un triángulo con a=5, c=3 y $\alpha = 30°$




**Solución:** En este caso, para encontrar el valor de $\gamma$ se usa la ley del seno. Lo primero que se hace es revisar cuáles son los datos conocidos y cuáles los desconocidos.

| Variable | Valor |
|---|---|
| a | 5 |
| b | Desconocido |
| c | 3 |
| $\alpha$ | 30° |
| $\beta$ | Desconocido |
| $\gamma$ | Desconocido |

Para encontrar el valor de $\gamma$ se hace

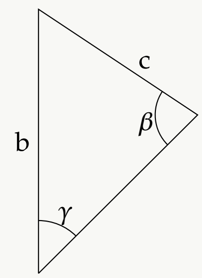
$$\begin{aligned}
\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \\
\frac{5}{\operatorname{sen}(30°)} &= \frac{3}{\operatorname{sen}\gamma} \\
5\operatorname{sen}\gamma &= 3\operatorname{sen}(30°) \\
\operatorname{sen}\gamma &= \frac{3\operatorname{sen}(30°)}{5} \\
\operatorname{sen}\gamma &= \frac{3\cdot\frac{1}{2}}{5} \\
\operatorname{sen}\gamma &= \frac{\frac{3}{2}}{5} \\
\operatorname{sen}\gamma &= \frac{3}{10} \\
\gamma &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{10}\right) \\
\gamma &= 17{,}46°
\end{aligned}$$

Como la función seno es positiva en el cuadrante II, allí hay otro ángulo en el que $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{10}\right) = \gamma$, para encontrarlo se hace $180° - 17{,}41° = 162{,}59°$, pero para $\gamma = 162{,}59°$ la figura obtenida no sería un triángulo dado que $162{,}59° + 30° = 192{,}59°$ y esto contradice el hecho de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.

Por lo tanto se concluye que sólo existe una solución para el ángulo $\gamma$ que genere un triángulo, la cual es $\gamma = 17{,}46°$.

**Ejemplo 6.8** **Caso LLA - Con dos soluciones**

Determine los posibles valores del ángulo $\gamma$ que puedan definir un triánglo con b=8, c=10 y $\beta = 45°$




**Solución:** En este caso, para encontrar el valor de $\gamma$ se usa la ley del seno. Lo primero que se hace es revisar cuáles son los datos conocidos y cuáles los desconocidos.

| Variable | Valor |
|---|---|
| a | Desconocido |
| b | 8 |
| c | 10 |
| $\alpha$ | Desconocido |
| $\beta$ | 45° |
| $\gamma$ | Desconocido |

Para encontrar el valor de $\gamma$ se hace

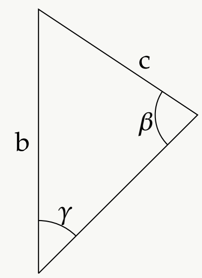
$$\begin{aligned}
\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} &= \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\\
\frac{8}{\operatorname{sen}(45°)} &= \frac{10}{\operatorname{sen}\gamma}\\
8\operatorname{sen}\gamma &= 10\operatorname{sen}(45°)\\
\operatorname{sen}\gamma &= \frac{10\operatorname{sen}(45°)}{8}\\
\operatorname{sen}\gamma &= \frac{10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{8}\\
\operatorname{sen}\gamma &= \frac{5\sqrt{2}}{8}\\
\gamma &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)\\
\gamma &= 62{,}11°
\end{aligned}$$

Como la función seno es positiva en el cuadrante II, allí hay otro ángulo en el que $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right) = \gamma$, para encontrarlo se hace $180° - 62{,}11° = 117{,}89°$. Los posibles valores para $\gamma$ son $62{,}11°$, $117{,}89°$ y ambos generan triángulos distintos dado que $45° + 62{,}11° < 180°$ y $45° + 117{,}89° < 180°$

Por lo tanto se concluye que existen dos soluciones para el ángulo $\gamma$ donde cada una genera un triángulo, las cuales son $\gamma = 62{,}11°$ y $\gamma = 117{,}89°$.

**Ejemplo 6.9** **Caso LLA - Sin solución**

Determine si es posible encontrar un ángulo $\beta$ tal que el triánglo con b=5, c=3 y $\gamma = 50°$ exista.




**Solución:** En este caso, para encontrar el valor de $\beta$ se usa la ley del seno. Lo primero que se hace es revisar cuáles son los datos conocidos y cuáles los desconocidos.

| Variable | Valor |
|---|---|
| a | Desconocido |
| b | 5 |
| c | 3 |
| $\alpha$ | Desconocido |
| $\beta$ | Desconocido |
| $\gamma$ | 50° |

Para encontrar el valor de $\gamma$ se hace

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\text{sen}\gamma} &= \frac{b}{\text{sen}\beta}\\
\frac{3}{\text{sen}(50°)} &= \frac{5}{\text{sen}\beta}\\
3\text{sen}\beta &= 5\text{sen}(50°)\\
\text{sen}\beta &= \frac{5\text{sen}(50°)}{3}\\
\text{sen}\beta &= 1{,}2767
\end{aligned}$$

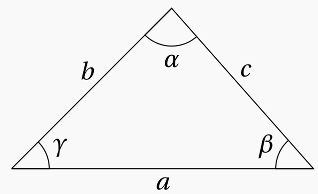
Como la función seno solo toma valores entre -1 y 1 se sigue que no existe ningun ángulo $\beta$ tal que $\beta = \text{sen}^{-1}(1{,}2767)$ de donde se concluye que un triángulo con estas dimensiones no puede existir.

### 6.2.2 Ley del coseno

**Teorema 6.2 Ley del coseno**

En un triángulo $\triangle ABC$,

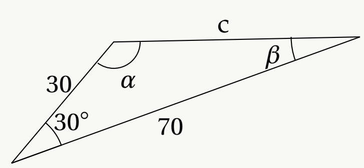
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$, donde $\alpha$ está entre b y c,
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$, donde $\beta$ está entre a y c,
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$, donde $\gamma$ está entre a y b.




Cuando el ángulo es igual a 90°, entonces $\cos(90°) = 0$ y por tanto la relación toma la forma $a^2 = b^2 + c^2$, es decir, queda igual al teorema de Pitágoras.

**Ejemplo 6.10** **Caso LAL**

Resolver el siguiente triángulo




**Solución:** En este caso, para resolver el triángulo se parte de la ley del coseno. Lo primero que se hace es revisar cuáles son los datos conocidos y cuáles los desconocidos.

| Variable | Valor |
|---|---|
| a | 70 |
| b | 30 |
| c | Desconocido |
| $\alpha$ | Desconocido |
| $\beta$ | Desconocido |
| $\gamma$ | 30° |

Se aplica la ley del coseno para encontrar el valor de c.

$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)\\
c^2 &= 70^2 + 30^2 - 2\cdot 70\cdot 30\cos(30°)\\
c^2 &= 4900 + 900 - 4200\cos(30°)\\
c^2 &= 5800 - 4200\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
c^2 &= 5800 - 2100\cdot\sqrt{3}\\
c^2 &= 2162{,}69\\
\sqrt{c^2} &= \sqrt{2162{,}69}\\
c &= 46{,}5
\end{aligned}$$

Para encontrar el valor de $\alpha$ se aplica la ley del seno.

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} &= \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\\
\frac{30}{\operatorname{sen}\beta} &= \frac{46{,}5}{\operatorname{sen}(30^\circ)}\\
30\operatorname{sen}(30^\circ) &= 46{,}5\operatorname{sen}\beta\\
30\frac{1}{2} &= 46{,}5\operatorname{sen}\beta\\
15 &= 46{,}5\operatorname{sen}\beta\\
\frac{15}{46{,}5} &= \operatorname{sen}\beta\\
\operatorname{sen}\beta &= \frac{15}{46{,}5}\\
\beta &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{15}{46{,}5}\right)\\
\beta &= 18{,}82^\circ
\end{aligned}$$

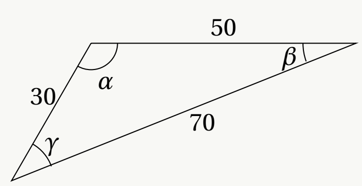
Para encontrar el valor de $\alpha$ se usa el hecho de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a $180^\circ$, así

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma &= 180^\circ\\
\alpha+18{,}82^\circ+30^\circ &= 180^\circ\\
\beta+48{,}82^\circ &= 180^\circ\\
\beta &= 180^\circ-48{,}82^\circ\\
\beta &= 131{,}18^\circ
\end{aligned}$$

Se concluye que $c=46{,}5$; $\beta\approx 18{,}82$; $\alpha=131{,}18^\circ$

**Ejemplo 6.11** **Caso LLL**

Resolver el siguiente triángulo




**Solución:** En este caso, para resolver el triángulo se parte de la ley del coseno. Lo primero que se hace es revisar cuáles son los datos conocidos y cuáles los desconocidos.

| Variable | Valor |
|---|---|
| a | 70 |
| b | 30 |
| c | 50 |
| $\alpha$ | Desconocido |
| $\beta$ | Desconocido |
| $\gamma$ | Desconocido |

Se aplica la ley del coseno para encontrar el valor de $\alpha$.

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)\\
70^2 &= 30^2+50^2-2\cdot 30\cdot 50\cos(\alpha)\\
4900 &= 900+2500-3000\cos(\alpha)\\
4900 &= 3400-3000\cos(\alpha)\\
4900-3400 &= 3000\cos(\alpha)\\
\frac{1500}{3000} &= \cos(\alpha)\\
\frac{1}{2} &= \cos(\alpha)\\
\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) &= \alpha\\
\alpha &= 60^\circ
\end{aligned}$$

Para encontrar el valor de $\beta$ se aplica la ley del seno.

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} &= \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\\
\frac{30}{\operatorname{sen}\beta} &= \frac{70}{\operatorname{sen}(60^\circ)}\\
30\operatorname{sen}(60^\circ) &= 70\operatorname{sen}\beta\\
30\frac{\sqrt{3}}{2} &= 70\operatorname{sen}\beta\\
15\sqrt{3} &= 70\operatorname{sen}\beta\\
\frac{15}{70} &= \operatorname{sen}\beta\\
\operatorname{sen}\beta &= \frac{15\sqrt{3}}{70}\\
\beta &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)\\
\beta &= 21{,}79^\circ
\end{aligned}$$

Para encontrar el valor de $\gamma$ se usa el hecho de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a $180^\circ$, así

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma &= 180^\circ\\
60^\circ+21{,}79^\circ+\gamma &= 180^\circ\\
81{,}79^\circ+\gamma &= 180^\circ\\
\gamma &= 180^\circ-81{,}79^\circ\\
\gamma &= 98{,}21^\circ
\end{aligned}$$

Se concluye que $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 121{,}79^\circ$; $\gamma = 98{,}21^\circ$

## Bibliografía


- Swokowski, E. y Cole, J.(2009). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. http://www.biblioises.com.ar/Contenido/
y-trigonometria-.pdf

- Ayres, F.(1954). Plane and spherical trigonometry. https://archive.org/stream/SchaumsTheoryProblemsOfTrigonometry/
SchaumsTrigonometry# page/n0/mode/2up

mi U Colmayor Es Calidad

# Quédate
## con la Trigonometría

Quédate en COLMAYOR!

Alcaldía de Medellín
Cuenta con vos